L3, Analyse Fonctionnelle

Durée: trois heures

24 juin 2022

Problème 1

Soit E l'espace préhilbertien des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. On note par $||f||$ cette norme de $f \in E$.

1) Soit $0 < a < 1$. Pour $g \in E$, on pose $T(g) = \displaystyle\int_0^a xg(x)\,dx$.

(i) Montrer que T définit une forme linéaire continue sur E et la norme $|||T|||$ de T est majorée par $\sqrt{a^3/3}$.

(ii) Pour $n \geq 1$ tel que $a + \dfrac{1}{n} < 1$, on définit la fonction $g_n \in E$ par

$$g_n(x) = x \quad \text{si } x \in [0, a], \quad g_n(x) = 0 \quad \text{si } x \in [a + \frac{1}{n}, 1],$$

et reliée par un segment entre a et $a + \dfrac{1}{n}$. Calculer la limite simple de la suite de fonctions g_n lorsque $n \to +\infty$.

(iii) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} ||g_n||$. En déduire une minoration de la norme $|||T|||$ de T. Que vaut $|||T|||$?

(iv) Existe-il une fonction $h \in E$ telle que $T(g) = \langle g, h\rangle$ pour tout $g \in E$? Justifier votre réponse.

2) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans E définies par

$$f_n(x) = n \quad \text{si } x \in [0, 1/n^3] \quad \text{et} \quad f_n(x) = x^{-1/3} \quad \text{si } x \in [1/n^3, 1].$$

(i) Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de E.

(ii) Soit $g \in E$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 (g(x) - x^{-1/3})^2\,dx$ converge et que sa valeur est strictement positive.

(iii) Soit $g \in E$. Montrer que $||g - f_n||$ ne converge pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Conclure.

Tourner SVP

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique paire qui vaut x si $x \in [0, \pi]$.

1) Dessiner le graphe $y = f(x)$ pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

2) On définit les coefficients de Fourier de f par $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$, et pour $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Calculer les $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

3) On rappelle que $\{1, \sqrt{2} \cos(nx), \sqrt{2} \sin(nx);\ n \geq 1\}$ est une base hilbertienne de $L^2\big([-\pi, \pi], \frac{dx}{2\pi}\big)$. Montrer que dans L^2,

$$(*) \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n^2} \big((-1)^n - 1\big) \cos(nx).$$

4) Montrer que l'égalité ci-dessus $(*)$ est vraie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

5) En choisissant une valeur de x appropriée, déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, puis la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Question de cours : Théorème de Riesz-Fisher

Le but de ce problème est de montrer que $L^1([0, 1], dx)$ est un espace de Banach. Pour cela,

1) montrer que si f, g sont dans L^1, alors $f + g$ est dans L^1 (on admet les autres propriétés d'EV) ;

2) montrer que la norme L^1 vérifie les propriétés d'une norme ;

3) montrer qu'un espace vectoriel normé est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente ;

4) énoncer le théorème de convergence monotone ;

5) soit $(f_n)_{n\geq 0}$ dans L^1 une suite telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n|| < +\infty$ (série absolument convergente). On pose $g_n = \sum_{k=0}^{n} |f_k|$. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ admet une limite g, fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$;

6) montrer que g est dans L^1 ;

7) en déduire que g est finie presque partout ;

8) en déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge presque partout vers une fonction mesurable h à valeurs dans $\mathbb{R}$;

9) montrer que $|h| \leq g$ presque partout et en déduire que h est dans L^1 ;

10) énoncer le théorème de convergence dominée ;

11) montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge vers h dans L^1.

Conclure