L3 MATHS

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
L3-Algèbre linéaire et bilinéaire

ANNÉE 2021-2022
4 janvier 2022

**Examen**
**Durée : 3 heures**

---

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

---

**Exercice I.** **[Questions de cours] (5 points)**

(a) Soit $f$ un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension $n$. Montrer que $f^n = 0$.
(b) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Donner la définition d'un endomorphisme cyclique de $E$. Montrer que si $f$ est un endomorphisme cyclique, alors le polynôme minimal de$f$ est égal au polynôme caractéristique (au signe près).
(c) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que toute forme quadratique $q : E \to \mathbb{K}$, de forme polaire $\phi$, admet une base orthogonale par rapport à $\phi$. Existe-t-il toujours une base orthonormée par rapport à $\phi$?
(d) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Soit $q$ une forme hermitienne sur $E$. Donner la relation entre les matrices $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(q)$. Justifier le résultat.

**Exercice II (4 points)** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$.
(b) Donner une base de chaque sous-espace propre de $A$.
(c) Calculer le polynôme minimal de $A$.
(d) Déterminer la réduction de Frobenius de $A$.
(e) Déterminer la réduction de Jordan de $A$, après avoir justifié que celle-ci existe.
(f) Trouver une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est la réduite de Jordan trouvée à la question (e).

**Exercice III.** **(4 points)** Soit $c \in \mathbb{R}$, et soit $q_c$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$q_c(x, y, z) = x^2 + 2cxy + 2yz + cz^2.$$

Pour chaque valeur de $c$, réduire la forme quadratique $q_c$ en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Déterminer le rang, la signature et le noyau pour $c = 0, 1, -1$ et $-2$.

**Exercice IV. (4 points)** Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\Phi(A) = \mathrm{tr}(\overline{A}A)$.

(a) Montrer que $\Phi$ est une forme hermitienne.

(b) Soient $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(c) Pour $n = 2$, déterminer la matrice $M = Mat_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

(d) Trouver une matrice $U$ unitaire telle que ${}^t\overline{U}MU = D$ soit diagonale. Déterminer $D$.

**Exercice V. (3 points)**

(a) Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les matrices symétriques $M$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

(i) $Mv = 2v$ ; et

(ii) 1 est une valeur propre de $M$.

Donner l'ensemble de tous les vecteurs propres de $M$.

(b) Existe-t-il une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant deux vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associés à deux valeurs propres distinctes ? Justifier votre réponse.

**Exercice VI. (3 points)** Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ est **symétrique définie positive**.

(a) Si $n = 2$, montrer que $\max\{a_{11}, a_{22}\} > |a_{12}|$, et que $a_{11}$ et $a_{22}$ sont strictement positifs.

(b) Pour $n$ général, montrer que

$$\max_{1 \le i \le n} \{a_{ii}\} = \max_{1 \le i,j \le n} \{|a_{ij}|\}.$$