Licence de Mathématiques (2021-2022)

Intitulé de l'enseignement : Algèbre linéaire et bilinéaire (L3).
Date : jeudi 16 juin 2022, 08h00-11h00

Examen : session 2

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié lors de la correction des copies.

Questions de cours (6 pts).

(1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On rappelle que l'on note χ_f le polynôme caractéristique de f. Démontrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$.

(2) Donner un exemple de matrice trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(3) Rappeler la définition d'endomorphisme unitaire (d'un espace hermitien) et de matrice unitaire, puis énoncer (sans en faire la démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes unitaires, ainsi que la version matricielle (pour les matrices unitaires).

(4) Soient E un espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie) et F un sous-espace vectoriel de E. Rappeler la définition (sans en justifier les détails) de l'espace vectoriel quotient E/F, puis démontrer que

$$\dim(F) + \dim(E/F) = \dim(E).$$

Exercice 1 (4 pts). On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

(1) Démontrer que les matrices A et B sont diagonalisables et commutent.

(2) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que les deux matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont simultanément diagonales.

Exercice 2 (4 pts). On considère la matrice $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(1) Déterminer la réduite de Jordan de M, après avoir justifié que celle-ci existe.

(2) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est la réduite de Jordan trouvée à la question précédente.

(3) Déterminer les invariants de similitude de M. En déduire la réduite de Frobenius de M.

Exercice 3 (4.5 pts). On considère la forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^4$ définie par

$$q\colon E \to \mathbb{R},\ (w,x,y,z) \mapsto 3xy - 8xz + 5yz.$$

On note ϕ la forme polaire associée à q.

(1) Appliquer la méthode de Gauss pour écrire q comme une somme de carrés de formes linéaires sur E linéairement indépendantes. Quelle est la signature de q ?

(2) Utiliser le résultat de la question précédente pour construire une base ϕ-orthogonale de E.

Exercice 4 (2.5 pts). Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace hermitien (de dimension finie). On suppose que f est un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\langle f(x), x\rangle = 0$.

(1) Démontrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y\rangle = 0$.

(2) En déduire que f est l'endomorphisme nul.

(3) Peut-on démontrer la même chose dans le cas où $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien ?