Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Mardi 17 mai 2021
9h-12h

Examen d'Algèbre 2 Session 1 -

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer le théorème de Lagrange.
2. Soient H, G et Q trois groupes, $i : H \longrightarrow G$ et $\pi : G \longrightarrow Q$ des morphismes de groupes.
   (a) Que signifie : la suite $\{1\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \{1\}$ est exacte ?
   (b) Que signifie : la suite $\{1\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \{1\}$ exacte est scindée ?
   (c) Énoncer le théorème de caractérisation des produits semi-direct par les suites exactes.
3. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X.
   (a) Soit x un élément de X. Rappeler les définitions du stabilisateur G_x et de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (b) Montrer que l'indice $[G : G_x]$ du stabilisateur G_x est égal au nombre d'éléments de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (c) Soient x et y deux éléments de X tels que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, Montrer que les stabilisateurs G_x et G_y sont conjugués.

Exercice 2 (Petits exercices indépendants) :

1. Soient G un groupe et H un sous-groupe normal de G et f un automorphisme de G.
   (a) Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe de G et qu'il est normal dans G.
   (b) Montrer que les groupes quotients G/H et $G/f(H)$ sont isomorphes.
2. On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. En appliquant un théorème d'isomorphisme, démontrer que
   (a) le groupe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U}, \times)$.
   (b) le groupe $(\mathbb{C}^*/\mathbb{U}, \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
3. Démontrer que tout groupe d'ordre 15 est cyclique.
4. Soient p un nombre premier et m un entier naturel avec $p > m$. Soient G un groupe d'ordre pm et H un sous-groupe de G d'ordre p. Montrer que H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 3 (Sous-groupe quasi-normal) :

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit quasi-normal, si pour tout sous-groupe K de G on a $HK = KH$

1. Montrer que si H est un sous-groupe quasi-normal de G alors pour tout sous-groupe K de G le sous-ensemble HK est un sous groupe de G qui contient H.
2. Démontrer que tout sous-groupe normal de G est quasi-normal.
3. Démontrer que si H est quasi-normal alors pour tout $x \in G$, le conjugué xHx^{-1} de H est quasi-normal.
4. Démontrer que si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes quasi-normaux alors H_1H_2 est quasi-normal.
5. Un sous-groupe quasi-normal H est dit maximal (parmi les sous-groupes quasi-normaux) si pour tout sous-groupe quasi-normal H' qui contient H on a $H' = G$ ou $H' = H$.
   Démontrer que tout-sous-groupe quasi-normal maximal est normal dans G.

Exercice 4 (Sous-groupes de $\mathcal{A}_4$) :

1. Quels sont les sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_4$?
2. Déterminer l'ordre de tous les éléments de $\mathcal{A}_4$.
   Le groupe $\mathcal{A}_4$ possède-t-il un sous-groupe cyclique d'ordre 6 ?
3. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$ engendré par un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3. Montrer que H contient au moins trois éléments d'ordre 3. Peut-il être isomorphe à $\mathcal{S}_3$? En déduire qu'il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6 dans$\mathcal{A}_4$.
4. Donner la liste des sous-groupes de $\mathcal{A}_4$.

La suite au verso : Touner la gage SVP

Exercice 5 (Un groupe de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$) :

1. (Questions préliminaires)
   (a) Dans le groupe additif $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ préciser l'opposé de chaque élément en donnant un représentant dans $\{0, 1, \cdots, 6\}$.
   (b) Dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \times)$ donner l'ordre de chaque élément et préciser son inverse en donnant un représentant dans $\{1, \cdots, 6\}$.
2. Soit G l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ de la forme $G = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \; x, y \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \;\; x \neq 0 \right.$
   (a) Montrer que l'ensemble G muni de la multiplication des matrices est un groupe. Montrer que G n'est pas abélien. Préciser son ordre.
   (b) Montrer que G admet un unique sous-groupe H d'ordre 7. Justifier que H est normal dans G. Donner la liste des éléments de H.
   (c) Soient $K = \left\{ M(x,0) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$, $\pi : G \longrightarrow K$ définie par $\pi(M(x,y)) = M(x,0)$ et $i : H \longrightarrow G$ l'injection canonique.
   Montrer que $(K, \times)$ est un sous groupe de G. Préciser l'ordre de K et montrer que K est cyclique.
   (d) Montrer que la suite $\{1\} \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow \{1\}$ est exacte et qu'elle est scindée.
   (e) Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct de $H \rtimes_\varphi K$. Préciser le morphisme φ.
   (f) Montrer que $HK = G$.
   (g) Montrer que G/H est isomorphe à K.
   (h) Déterminer le centre de G noté $Z(G)$.
   (i) Démontrer que le sous-groupe dérivée $D(G)$ de G est égal à H. (On justifiera dans un premier temps que $D(G) \subset H$.)