Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2021-2022
Janvier 2022

Algèbre 1
Contrôle Terminal

Question de cours 1. Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et I un idéal bilatère de A tel que $I \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

(1) Rappeler la définition de la projection canonique $\pi : A \to A/I$.

(2) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme $\psi : A/I \to B$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$, où $\pi : A \to A/I$ est la projection canonique.

(3) Montrer que, si φ est surjectif et $I = \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors ψ est un isomorphisme.

Question de cours 2. Soient A un anneau principal et $a, b \in A \setminus \{0_A\}$.

(1) Donner les définitions de pgcd et ppcm de a et b.

(2) Soit $m \in A$. Montrer que m est un pgcd de a et b si et seulement s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- m divise a et b.
- Si un élément non nul d de A divise a et b, alors d divise m.

(3) Soit $M \in A$. Montrer que M est un ppcm de a et b si et seulement s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- a et b divisent M.
- Si a et b divisent un élément non nul d de A, alors M divise d.

(4) Soit M un ppcm de a et b. Montrer qu'il existe un pgcd m de a et b tel que $M\,m = ab$.

Exercice 1. Rappelons que *l'ordre* d'un élément σ dans un groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est le plus petit entier $\ell \geq 1$ tel que $\sigma^\ell = \mathrm{id}$.

(1) Soit σ un cycle de longueur ℓ dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que σ est d'ordre ℓ.

(2) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit ℓ l'ordre de σ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma^p = \mathrm{id}$ si et seulement si ℓ divise p.

(3) Soient σ et τ deux permutations d'ordre ℓ et k, respectivement. Montrer que, si σ et τ sont à supports disjoints, alors l'ordre de $\sigma \circ \tau$ est $\mathrm{ppcm}(\ell, k)$.

(4) Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_p$ la décomposition de σ comme produit de cycles à supports disjoints. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ on note ℓ_i la longueur de c_i. Montrer que l'ordre de σ est $\mathrm{ppcm}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$.

Exercice 2. On suppose que A est un anneau commutatif. Un élément $a \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0_A$.

(1) Montrer que les éléments nilpotents forment un idéal de A.

(2) Montrer que, si $a \in A$ est nilpotent, alors $1_A + a$ est inversible.

(3) Donner un exemple où a n'est pas nilpotent mais $1_A + a$ est inversible.

(4) Soit $a \in A$. Montrer que $1 + aX$ est inversible dans $A[X]$ si et seulement si a est nilpotent dans A.

Exercice 3.

(1) Démontrer que l'ensemble $A = \{\frac{a}{3^k} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

(2) Soit I un idéal de A. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

(3) Soit I un idéal de A. Déduire de la partie (2) qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ engendrant l'idéal I.

(4) Que peut-on en conclure sur A ?