L3 maths

Université de Bourgogne — Année 2020-2021
Topologie des espaces métriques — 17 juin

Rattrapage – 3h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.
Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, (E, d) est un espace métrique. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront munis de leur distance usuelle.

Exercice 1.
Soit $I = [-1, 1]$. Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit l'application

$$\begin{aligned} f_n \colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n. \end{aligned}$$

Décrire les trois ensembles suivants (en les écrivants comme une union finie d'intervalles).

$$\textbf{1)}\ A = \bigcap_{n\geq 1} \{x \in I\,;\, f_{n+1}(x) \leq f_n(x)\}. \quad \textbf{2)}\ B = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{y \in I} \{x \in I\,;\, f_n(x) \geq f_n(y)\}.$$

$$\textbf{3)}\ C = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq N} \left\{x \in I\,;\, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Exercice 2.
Parmi les affirmations suivantes, prouver celles qui sont vraies quelque soit l'espace métrique (E, d). Pour chacune des autres, donner un exemple explicite pour lequel cette affirmation n'est pas vraie.

1) Tout fermé non-vide de E est une union d'ouverts de E.
2) Tout ouvert non-vide de E est une union de fermés de E.
3) Soit $f\colon E \to E$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in E$, $d(x, y) \leq \eta$ implique $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

b) Pour tout ouvert V de E, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

4) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) $\exists x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \epsilon$.

b) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in E$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \epsilon$.

Exercice 3.
1) Soit $x \in E$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E qui converge vers x. Montrer que $Y := \{x_n\,;\, n \geq 0\} \cup \{x\}$ est un compact de E.
2) Soit $f\colon E \to E$ une application continue. On suppose de plus que si $K \subset E$ est compact alors $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que si $F \subset E$ est un fermé de E alors $f(F)$ est un fermé de E.

Exercice 4.
Soit $\epsilon > 0$. On suppose que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de E telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $m \neq n$ on ait $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$. Montrer que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 5.
Rappelons que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.
1) Montrer que $\mathbb{S}^1$ est connexe.
2) En déduire que si $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe $z \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.
3) En déduire que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$.