Licence de Mathématiques

2020-2021

Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités

Année : L3

Date : 18 Juin 2021

Examen 2ème session

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Fonction de répartition) : Tracer le graphe des fonctions suivantes.

- Pour chacune de ces fonctions, préciser s'il s'agit de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- Si oui, est-ce qu'on peut définir son espérance ?
- Si oui, calculer l'espérance correspondante.
- Déterminer si la variable aléatoire est à densité ou non. Dans l'affirmative, calculer la densité associée.

▷ **1)** $F_1(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_1(x) = 1 - \exp(-x)$ si $x > 0$,

▷ **2)** $F_2(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\exp(-x)$ si $x \geq 0$,

▷ **3)** $F_3(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $F_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-a}$ si $x > 1$ (avec $a > 0$).

Exercice 2 (Stirling) : Soit $(S_n)_n$ une suite de variables de loi de Poisson telles que $\mathbb{E}[S_n] = n$ et

$$Z_n := \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

▷ **1)** Justifier que $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite que l'on notera Z.

▷ **2)** On pose $x^+ = \max(x, 0)$. Calculer $\mathbb{E}[Z^+]$.

▷ **3)** Soit X une variable aléatoire positive. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, dt.$$

▷ **4)** En déduire que

$$\mathbb{E}[Z_n^+] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_n > z)\, dz \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Z^+] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z > z)\, dz.$$

▷ **5)** Justifier que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n > z) = \mathbb{P}(Z > z).$$

▷ **6)** Montrer que $\mathbb{P}(Z_n > z) \leq \frac{1}{z^2}$ quelque soit $z > 0$.

▷ **7)** En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n^+] = \mathbb{E}[Z^+]$.

▷ **8)** Calculer explicitement $\mathbb{E}[Z_n^+]$ et $\mathbb{E}[Z^+]$ et retrouver la formule de Stirling.

Exercice 3 (Convergence p.s., en probabilité, en loi, L^p) : Pour les trois premières questions de cet exercice, on se place dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où $\mathcal{B}([0,1])$ désigne la tribu borélienne de l'intervalle $[0,1]$ et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la variable aléatoire réelle discrète X_n définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par

$$X_n(\omega) = n \text{ si } 0 \leq \omega < \frac{1}{4n}, \quad X_n(\omega) = -n \text{ si } \frac{1}{4n} \leq \omega < \frac{1}{2n}, \quad \text{et } X_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ si } \frac{1}{2n} \leq \omega < 1.$$

▷ **1)** Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers 0. Que dire de la convergence en probabilité ? de la convergence en loi ? de la convergence dans L^1 ?

▷ **2)** Pour tout $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(\{X_n = n\} \cap \{X_{n+1} = n+1\})$.

▷ **3)** Les variables X_n sont-elles indépendantes ?

On se place maintenant dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ quelconque. Soit (α_n) une suite de réels de $]0, 1/2[$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire réelle Y_n sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que

$$\mathbb{P}(Y_n = n) = \mathbb{P}(Y_n = -n) = \alpha_n \textit{ et } \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{1}{2n}\right) = 1 - 2\alpha_n.$$

▷ **4)** Calculer la fonction de répartition de Y_n, notée F_n, pour tout $n \geq 1$.

▷ **5)** Calculer la fonction de répartition, notée F, de la variable constante égale à 0.

▷ **6)** On suppose que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Montrer que $\forall t \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$.

▷ **7)** La suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ converge t'elle en loi ? Justifier.

▷ **8)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_n)_n$ pour que (Y_n) converge vers 0 dans L^2.

▷ **9)** Soit $0 < \epsilon < 1$. Calculer $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$ pour tout entier $n \geq 1$.

▷ **10)** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_n)_n$ pour que (Y_n) converge en probabilité vers 0.

▷ **11)** Déterminer une condition suffisante (C) sur $(\alpha_n)_n$ pour que $(Y_n)_n$ converge presque sûrement vers 0.

▷ **12)** Montrer que la condition (C) n'est par contre pas nécessaire en général (*indication* : utiliser la première question).

▷ **13)** Qu'en est-il dans le cas où on suppose en plus que les variables Y_n sont indépendantes ? Justifier.