Université de Bourgogne Année 2020-2021

L3 de mathématiques Sciences, Technologies, Santé - UE Statistique

---

Mercredi 16 juin 8h30-11h30 Statistiques inférentielles

Questions de cours (5 pts)

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi d'espérance μ et de variance σ^2.

1. Donner la définition de la moyenne aléatoire $\overline{X}$, de la variance aléatoire S^2 et de la variance aléatoire corrigée S^2_{corr}.
2. Donner les espérances de ces trois statistiques (pas de démonstration).
3. Enoncer le théorème de la loi faible des grands nombres.
4. Enoncer le théorème central limite pour $\overline{X}$.

Exercice 1 : (7 pts)

La densité d'une loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta > 0$ est donnée ci-dessous :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{-x}{\theta}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Pour cet exercice, on considère un échantillon de taille n : $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires iid de densité f.

1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ. En utilisant cet estimateur, lorsque $x_1 = 10, x_2 = 12, x_3 = 7, x_4 = 13$ et $x_5 = 9$ donner une approximation de θ.
2) Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}$.
3) On considère le code R suivant :

```
n=1000
N=1000000
theta=10
T1=numeric(N)

for (i in seq(1,N))
{
X=rexp(n,rate=1/theta)
T[i]=mean(X)
}

Q=mean(T)
```

R=mean((T-theta)^2)

Que représentent les lettres n, N, Q et R? Lorsque $n = 1000$, $theta = 10$ et que N est infiniment grand que devraient valoir Q et R?

4) Calculer les lois asymptotiques des statistiques suivantes :
   a) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$.
   b) $\sqrt{n}\left(\ln(\hat{\theta}) - \ln(\theta)\right)$.
5) En utilisant la question 4-b), construire un intervalle de confiance asymptotique pour θ de niveau $0,95$.

Exercice 2 : (3 pts)

On étudie la dépendance à un médicament. Une région du cerveau, appelée VTA, contient des récepteurs (GABA-A) qui, exposés à l'enzyme anhydrase carbonique contrôlent le basculement d'un état de non-accoutumance à un état d'accoutumance. Chez les sujets à risque, le dosage de l'activité de cet enzyme suit une loi normale d'espérance $10,7$ et d'écart-type inconnu. Une série de dosages effectués sur une même personne a donné :

$$12,9 \quad 8,7 \quad 9,0 \quad 1,2 \quad 2,7 \quad 9,7 \quad 9,1 \quad 10,3$$

1. Faire un test au niveau 0.05 pour dire si cette personne peut être considérée comme à risque.
2. Donner une approximation de la p-value de ce test

Exercice 3 : (5 pts) Pour étudier l'action d'un produit sur un paramètre biologique, on a mesuré, sur un échantillon de 10 individus, la valeur du paramètre avant et après le traitement. Les résultats sont les suivants :

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur avant traitement	5,33	6,13	5,66	4,50	5,35	6,32	4,24	5,83	6,27	4,86
Valeur après traitement	5,32	6,00	5,64	4,59	5,49	6,17	4,11	5,86	6,13	4,68

1. On souhaite faire un test pour savoir si le traitement modifie le paramètre biologique. Quelle condition mathématique doit-on avoir pour pouvoir le faire?
2. Faire ce test au niveau $\alpha = 0,05$.
3. On souhaite faire un intervalle de confiance pour estimer la valeur moyenne du paramètre après traitement. Quelle condition mathématique doit-on avoir pour pouvoir le faire?
4. **Construire soigneusement** et calculer cet intervalle de confiance pour une confiance de 90%.