L3 PC + PFA - Physique quantique 2

Université de Bourgogne
Licence 3 de physique
Examen seconde session de Mécanique quantique 2020-2021

QCM

Questionnaire à choix multiples :

réponse juste (1 pt), pas de réponse (0 pt), réponse fausse (-0.5 pt). Pour chaque question, une seule réponse est juste. Les réponses devront être justifiées sur une feuille séparée.
On considère un système quantique à deux niveaux. Une base $\mathcal{B}$ de l'espace de Hilbert est donnée par les états $|1\rangle$, $|2\rangle$. L'état du système est décrit par une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Dans la base $\mathcal{B}$, l'Hamiltonien H est donné par :

$$H = \cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x,$$

où $\theta \in (0, \pi)$. On rappelle que les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A tout temps t, la fonction d'onde du système peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle,$$

où les coefficients complexes c_k sont de module $|c_k|$ et de phase ϕ_k, $c_k = |c_k|e^{i\phi_k}$.

1. L'opérateur d'évolution $U(t) = \exp[iHt]$ est un opérateur :
   - ◯ hermitien
   - ◯ constant
   - ◯ unitaire
   - ◯ nilpotent
   - ◯ Aucune de ces réponses

2. La fonction d'onde $|\psi\rangle$ est dite normalisée si $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Cela signifie que :
   - ◯ $c_1^2 + c_2^2 = 1$
   - ◯ $\phi_1 + \phi_2 = 0$
   - ◯ $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$
   - ◯ $\phi_1\phi_2 = 0$
   - ◯ Aucune de ces réponses

3. Quelle est la trace de l'Hamiltonien H ?

   ○ 0
   ○ -1
   ○ $2\cos\theta$
   ○ $\cos(2\theta)$
   ○ Aucune de ces réponses

4. Quelles sont les valeurs propres de l'Hamiltonien H ?

   ○ 0 et 1
   ○ -1 et 0
   ○ $-\cos\theta$ et $\cos\theta$
   ○ $-\sin\theta$ et $\sin\theta$
   ○ Aucune de ces réponses

5. Quelle est l'expression du bra $\langle\psi|$?

   ○ $\langle 1|c_1 + \langle 2|c_2$
   ○ $\langle 1|c_1^* + \langle 2|c_2^*$
   ○ $\langle 1||c_1| + \langle 2||c_2|$
   ○ $\langle 1||c_1|^2 + \langle 2||c_2|^2$
   ○ Aucune de ces réponses

Problème

On considère un atome à deux niveaux d'énergie $E_g = 0$ et $E_e = \hbar\omega_0$, correspondant à deux états normés et orthogonaux que nous noterons $|g\rangle$ et $|e\rangle$. On supposera que les seuls états accessibles pour cet atome sont décrits par les vecteurs normés de l'espace de Hilbert sous-tendu par la base $\mathcal{B} = \{|g\rangle, |e\rangle\}$. Le Hamiltonien qui régit l'évolution temporelle de l'état de cet atome s'écrit donc simplement :

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|.$$

Cet atome est soumis à une excitation laser décrite par un champ électrique classique $E(t) = \mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t)$. On peut montrer que l'Hamiltonien qui régit l'évolution de l'atome en présence du laser s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{D}\mathcal{E}(t),$$

où $\hat{D}$ est un opérateur hermitien, appelé opérateur dipole, qui agit sur l'espace des états de l'atome et qui vérifie :

$$\langle e|\hat{D}|e\rangle = \langle g|\hat{D}|g\rangle = 0;\ \langle e|\hat{D}|g\rangle = \langle g|\hat{D}|e\rangle = d.$$

L'état initial du système à $t = 0$ est $|\psi_0\rangle$.

1. Ecrivez sous forme de matrices les opérateurs $\hat{H}$, $\hat{H}_0$ et $\hat{D}$. Montrez que $\hat{D}$ est bien un opérateur hermitien.
2. Montrez que dans le cas où $\mathcal{E}_0 = 0$, l'état du système $|\psi(t)\rangle$ à un temps t peut s'écrire sous la forme :
$$|\psi(t)\rangle = c_g|g\rangle + c_e e^{-i\omega_0 t}|e\rangle.$$
On déterminera l'expression explicite des coefficients c_g et c_e.
3. On suppose désormais que $\mathcal{E}_0 \neq 0$ mais indépendant du temps et que $|\psi_0\rangle = |g\rangle$. Montrez que le ket $|\psi(t)\rangle$ peut toujours s'écrire sous la forme :
$$|\psi(t)\rangle = c_g(t)|g\rangle + c_e(t)e^{-i\omega_0 t}|e\rangle.$$
4. Montrez que ces deux coefficients sont solutions du système d'équations différentielles suivant :
$$i\frac{dc_g}{dt} = \frac{\Omega}{2}c_e + \frac{\Omega}{2}e^{-2i\omega_0 t}c_e$$
$$i\frac{dc_e}{dt} = \frac{\Omega}{2}c_g + \frac{\Omega}{2}e^{2i\omega_0 t}c_g$$
où l'on a posé $\Omega = -d\mathcal{E}_0/\hbar$, appelée pulsation de Rabi.
5. Quelle est la dimension physique de la pulsation de Rabi ?
6. On suppose ensuite que l'on peut négliger les termes de la forme $e^{\pm 2i\omega_0 t}$ dans les équations précédentes. Montrez qu'en faisant cette approximation, les coefficients c_g et c_e sont solutions d'un système différentiel d'équations couplées du premier ordre linéaire et à coefficients constants.
7. Résolvez ce système pour la condition initiale $|\psi_0\rangle = |g\rangle$.
8. Quelle est la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|e\rangle$ à un instant t quelconque ?
9. En déduire qu'une impulsion laser, d'une durée que l'on précisera, permet de faire passer de manière certaine l'atome de l'état $|g\rangle$ à l'état $|e\rangle$.