L3 PC + L3 PFA

EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE I L3 2s, juin 2021

1) Répondre aux questions suivantes:
a) Formuler l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.
b) Préciser les notions d'état et d'observable, et leur relation avec une mesure dans une expérience. Donner un exemple.
c) Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire? et de l'qùation de Schrödinger dépendant du temps?
d) Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations?
e) Quelle est l'interprétation physique de l'opérateur Hamiltonien?
f) Formuler les relations d'incertitude de Heisenberg et préciser leur signification.
h) Citer un aspect de type corpusculaire et un aspect de type ondulatoire dans le comportement d'un électron.

2) On considère une particule libre dont l'état est donné par la fonction d'onde

$$\psi(x) = \nu \exp\left(\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right)$$

où p_0, x_0 sont des paramètres réels.
(a) Déterminer la distribution de probabilité de la coordonnée x. Déterminer la constante de normalisation ν.
(b) Déterminer les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion de la particule.
(c) Déterminer la valeur moyenne de l'énergie cinétique.
(d) Déterminer les écarts types de la position et de l'impulsion de la particule.
(e) Analyser ces résultats en termes de la relation d'incertitude.

Indications :
$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}$.
$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; (x-x_0)\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = 0$.
$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^2\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}(x_0^2 + a^2/2)$.
$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; (x-x_0)^2\exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}a^2/2$.

3) Un oscillateur harmonique se trouve à l'instant $t = 0$ dans l'état décrit par la fonction $\psi(x, t = 0) = (\varphi_0(x) + \varphi_1(x))/c$ où φ_0 et φ_1 sont respectivement l'état fondamental et le premier état excité (normalisés, correspondant aux énergies propres E_0 et E_1), et c la constante de normalisation réelle.
(a) Déterminer c.
(b) Quelle est l'évolution temporelle de $\psi(x, t)$ exprimée en fonction de $\varphi_0, \varphi_1, E_0$ et E_1?
(c) Si on fait une mesure de l'énergie à l'instant t_1, quelle est la probabilité de trouver (i) E_0, (ii) E_1, (iii) E_2?
(d) Quel est l'état du système immédiatement après la mesure? Quelle est son évolution temporelle ultérieure?
(e) On suppose que l'oscillateur n'a pas d'interaction avec aucun champ et que lors de cette première mesure on a trouvé E_1. Si on fait une deuxième mesure à l'instant $t_2 > t_1$, quelle serait la probabilité de trouver E_0?

4) Soit un système physique dont l'espace de Hilbert est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>, |u_4>\}$. Dans cette base, prise dans cet ordre, on considère les opérateurs

$$H = \hbar\omega\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = b\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = c\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où ω, b, c sont des constantes.
(a) Construire une base de vecteurs propres communs à H, B et C.
(b) Parmi les ensembles d'opérateurs $\{B, C\}$, $\{H, B\}$, $\{H, C\}$, lesquels forment un ensemble complet d'observables qui commutent (E.C.O.C.)?