UBFC UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

**Université de Bourgogne Franche-Comté**
**Licence Sciences et Techniques, L1-ST Juin 2021**

# Seconde session Module Phys. 1A_2

*Mécanique du point matériel*

**(Durée 1h30, épreuve sans document ni calculatrice, les exercices sont indépendants, le poids de chaque exercice dans le barème est indiqué entre parenthèses.)**

## Exercice n° 1 : Equations paramétriques en coordonnées cartésiennes (8.5pts)

On considère le mouvement de deux points matériels $M_1$ et $M_2$ relativement à un référentiel $\Re$ lié à la surface de la terre auquel on attache le repère cartésien $R(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Les trajectoires de chacun des points sont données par les équations paramétriques suivantes :

**Pour $M_1$:**
$$x_1(t) = t^2 - 1$$
$$y_1(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\, t^2 - 1$$

**Pour $M_2$:**
$$\frac{dx_2}{dt}(t) = 2$$
$$\frac{dy_2}{dt}(t) = 0$$

avec $x_1(t), x_2(t),\ y_1(t), y_2(t)$ et $t$ exprimés dans le SI.
A l'instant t=0, le mobile $M_2$ occupe la position de coordonnées cartésiennes (-1,0).
On considère tout d'abord le mouvement de $M_1$.

1. Quelles sont les coordonnées polaires du point $M_1$ à l'instant t=0.
2. Donner l'expression des composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{V}_{\Re}(M_1)$ en fonction du temps.
3. En déduire l'expression de la norme de la vitesse $\|\vec{V}_{\Re}(M_1)\|$ en fonction du temps.
4. En utilisant la méthode de votre choix, calculer la distance L parcourue par le mobile $M_1$ entre les instants t=0s et t=1s. (On pourra par exemple utiliser la relation $ds = \|\vec{V}_{\Re}(M)\|dt$ ).
5. Donner l'équation cartésienne de la trajectoire de $M_1$.
6. Quelle est la nature du mouvement de $M_1$ dans le référentiel $\Re$ (nature de la trajectoire, mouvement accéléré, décéléré, uniforme ?). Justifier votre réponse.
7. En utilisant les données numériques suivantes $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ ; $\tan 45° = 1$; $\tan 50° \approx 1{,}2$ ; évaluer grossièrement l'angle que forme la trajectoire de $M_1$ avec l'axe $Ox$ du repère cartésien.

On étudie maintenant le mouvement de $M_2$.

8. Quelles sont les coordonnées polaires du point $M_2$ à l'instant t=0.
9. Donner les équations paramétriques des coordonnées cartésiennes de $M_2$ en fonction du temps.
10. Quelle est la nature du mouvement de $M_2$ dans le référentiel $\Re$ (nature de la trajectoire, mouvement accéléré, décéléré, uniforme ?). Justifier votre réponse.
11. A quel instant $t_c$, le mobile $M_1$ coupe-t-il la trajectoire du mobile $M_2$ ?

## Exercice n°2 STATIQUE : Ballon à Hélium (5pts).

Les ballons à hélium sont utilisés pour les relevés de données physico-chimiques atmosphériques. L'objectif de l'exercice est d'établir la capacité de transport du ballon en fonction de ses dimensions. On considère un ballon sphérique de rayon **R**. Le ballon est situé à proximité du sol à une pression atmosphérique de 1 bar. La pression est considérée comme constante dans toute la suite de l'exercice. On assimile le ballon à un point matériel M situé au centre du ballon comme le montre la Fig. 1.

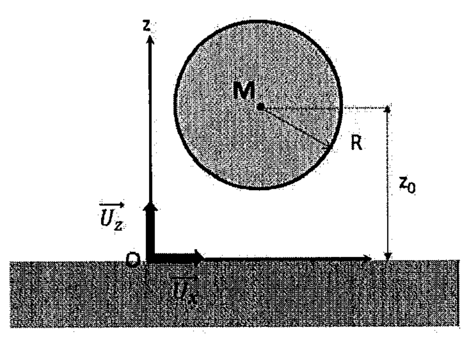


Fig. 1

Le tableau ci-dessous donne les masses volumiques de l'air et de l'hélium sous une pression de 1bar à 15°C.

| | 15°C |
|---|---|
| $\rho_{Air}$ | 1,224 kg/m$^3$ |
| $\rho_{He}$ | 0,169kg/m$^3$ |

On suppose le ballon gonflé à l'hélium. Soit $V_B = \frac{4}{3}\pi R^3$ le volume occupé par le ballon sous une pression de 1 bar. On désigne par $m_{He}$ la masse d'hélium contenue dans le ballon. Le ballon est utilisé pour transporter une expérience dont la masse utile est $m_u$, de sorte que la masse totale du ballon gonflé à l'hélium est $m_u + m_{He}$. On précise que la masse de l'enveloppe du ballon est prise en compte dans la masse utile $m_u$ et que le volume de l'enveloppe et de la masse utile sont négligeables devant le volume interne du ballon. ***Ces hypothèses simplificatrices permettent de supposer que la masse totale du dispositif ballon+masse utile est $m_u + m_{He}$ et que le volume de l'ensemble ballon+masse utile est $V_B$.*** On suppose que les conditions requises pour que le ballon soit à l'équilibre statique sont vérifiées. Le ballon occupe alors une position telle que son centre se situe à une altitude $z_0 > R$ (voir Fig. 1).

1. Faire le bilan des forces s'appliquant sur le ballon. Reproduire la Fig. 1 et faire figurer les forces agissant sur le ballon. On rapportera les forces au centre M du ballon.
2. Donner l'expression littérale de la masse d'hélium $m_{He}$ contenue dans le ballon en fonction de $V_B$ et de $\rho_{He}$.
3. Donner l'expression littérale de la masse d'air $m_{air}$ déplacée par le ballon en fonction de $V_B$ et de $\rho_{Air}$.
4. Donner les composantes dans la base cartésienne $(\vec{u_x}, \vec{u_z})$ des forces agissant sur le ballon en fonction de $m_u$, $m_{He}$, $m_{Air}$ et $g$ où $g$ désigne l'accélération de pesanteur.
5. Quelle égalité doivent vérifier les masses mises en jeu dans le problème pour que le ballon soit à l'équilibre ?

**Exercice n°3 : DYNAMIQUE, Distance de Freinage (7.5pts).**

Une voiture assimilable à un point matériel M de masse $m$, roule à vitesse constante $\vec{v_0}$ sur une route rectiligne horizontale (Fig. 2, Situation A). A l'instant initial t=0, la voiture est située à l'origine du repère cartésien attaché au référentiel dans lequel on étudie le mouvement. A t=0, le conducteur détecte un obstacle sur la route et active les freins de la voiture. Cette action a pour conséquence de bloquer les roues de la voiture de telle sorte que la force de frottement à l'origine de la décélération de la voiture est une force de frottement solide $\vec{F_d}$ dont ***l'expression est donnée par $\vec{F_d} = -\mu_d R_N \vec{u}$ où $\mu_d$ désigne le coefficient de frottement dynamique, $R_N$ désigne la norme de la composante normale de la réaction du support s'exerçant sur M et $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire orienté dans le sens de la vitesse de M.*** L'objectif de l'exercice est d'établir la distance de freinage conduisant à l'arrêt total de la voiture.

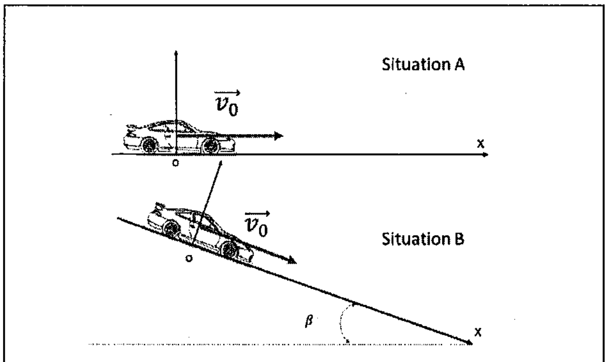


Fig. 2

**On se place d'abord dans la situation A (route horizontale).**

1)Faire le bilan des forces agissant sur la voiture au cours de la phase de décélération.

2) Ecrire la relation vectorielle traduisant le principe fondamental de la dynamique au cours de la phase de décélération de la voiture et la projeter sur l'axe Ox du repère cartésien.

3)Que vaut le module de la composante normale (au support) de la réaction du support $R_N$ exprimé en fonction des données du problème et de l'accélération de la pesanteur $g$?

4)En déduire l'expression de la force de frottement solide $\vec{F_d}$ en fonction de $\mu_d$, $m$ et $g$.

5)Montrer que l'équation que différentielle vérifiée par $x$ est de la forme : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -C$ où $C$ est une constante qui s'exprime en fonction de $g$ et $\mu_d$.

6) Intégrer l'équation différentielle obtenue à la question (5) pour déterminer l'équation horaire de vitesse puis l'équation paramétrique de la position $x(t)$ de la voiture au cours de la phase de décélération.

7) Montrer que la voiture s'arrête à l'instant $t_0 = \frac{v_0}{\mu_d g}$.

8) Quelle est l'expression littérale de la distance $L$ parcourue par la voiture entre l'activation des freins et son arrêt total en fonction de $v_0$, $\mu_d$ et $g$.

**On se place maintenant dans la situation B.**

La voiture roule sur une route rectiligne présentant un profil descendant sous un angle $\beta$ par rapport à l'horizontale (Fig. 2, Situation B). L'objectif de cette seconde partie de l'exercice est de quantifier l'effet de la pente sur la distance de freinage. Les conditions initiales du mouvement sont identiques à celle de la situation A (vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ et voiture à l'origine du repère à t=0).

9) Reproduire la Fig. 2 (Situation B) et représenter les forces agissant sur la voiture au cours de la phase de décélération.

10) Que vaut maintenant la composante normale $R_N$ de la réaction du support en fonction de $m$, $g$ et de $\beta$.

11) En déduire l'expression de la force de frottement solide dynamique $\overrightarrow{F_d}$ en fonction de $\mu_d$, $m$, $g$ et de $\beta$.

12) En projetant le PFD sur l'axe Ox du repère, montrer que l'accélération de la voiture selon cet axe vérifie l'équation :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g(\mu_d \cos\beta - \sin\beta)$$

A partir de l'équation ci-dessus (question 12), on peut montrer que si $L'$ désigne la distance de freinage en présence de la pente d'angle $\beta$ et $L$ la distance de freinage sur route horizontale alors on a :

$$\frac{L'}{L} = \frac{\mu_d}{\mu_d \cos\beta - \sin\beta}$$

13) A quelle condition reliant l'angle $\beta$ et le coefficient de frottement dynamique $\mu_d$ l'arrêt de la voiture devient-il impossible sur la route descendante ? Justifier votre réponse.