

Ondes et Vibrations

Sans document – Durée 2h00 – Calculatrice autorisée – Téléphone portable éteint et rangé

I. Dispersion des ondes dans un cristal monoatomique

On considère un cristal qui peut être modélisé par une chaîne monoatomique linéaire infinie constituée d'atomes de masse m et de périodicité a (voir Figure 1). Chaque atome interagit élastiquement avec ses deux plus proches voisins. K représente la constante de couplage. On note u_n le déplacement longitudinal de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre $x_n^0 = na$.

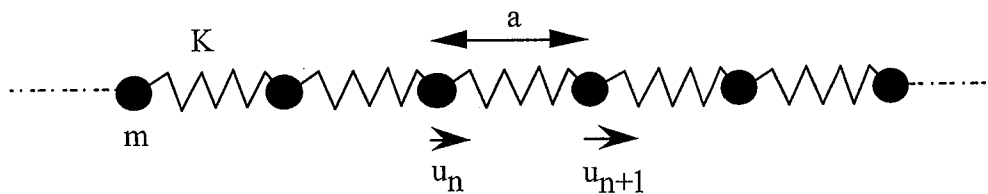


Figure 1

1. Etablir l'équation du mouvement de l'atome n de la chaîne.
2. Trouver la relation de dispersion et tracer la courbe de dispersion. Déterminer la fréquence de coupure.
3. Déterminer la vitesse de phase pour $0 \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ et préciser sa signification physique.
4. Déterminer la vitesse de groupe pour $0 \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ et préciser sa signification physique.

II. Vitesse des ondes acoustiques dans les gaz

On rappelle que la vitesse des ondes acoustiques dans les gaz est donnée par $c = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}}$ où χ est le coefficient de compressibilité isentropique et ρ la masse volumique du gaz. On suppose que le gaz est assimilable à un gaz parfait.

1. Rappeler la définition de χ . Trouver l'expression de c en fonction de la constante des gaz parfaits R , de la masse molaire M , du rapport des chaleurs massiques γ et de la température T .
2. Calculer c pour l'air à 22°C (on donne $R = 8.314 \text{ J K}^{-1}\text{mole}^{-1}$, $M = 29 \text{ g/mole}$ et $\gamma = 1.4$).

III. Ondes hydrodynamiques en eau peu profonde

En eau peu profonde la relation de dispersion des ondes de gravité hydrodynamiques de faible amplitude est de la forme :

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(hk)} \quad (1)$$

où g est l'accélération de la pesanteur et h la profondeur d'eau.

1. Approximer la relation de dispersion (1) dans le cas de l'eau peu profonde ($hk \ll 1$). On fera un développement de \tanh jusqu'à l'ordre un et on posera $c_0 = \sqrt{gh}$. On rappelle que $\tanh \varepsilon \cong \varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$.
2. Utiliser la relation de dispersion approximée précédente pour déterminer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g . Commentaires.