

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JUIN 2021
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. On étudie le mouvement de deux oscillateurs x_1, x_2 (masse m , constante de raideur k) couplés :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

1. a) On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Mettre ce système se met sous la forme matricielle

$$\ddot{X} = -\Omega_2 X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et Ω_2 une matrice à déterminer.

b) Montrer que la matrice Ω_2 est hermitienne.

2. Déterminer les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres (normés) associés $|u_i\rangle$ de Ω_2 .

3. A l'aide du théorème de décomposition spectrale $f(A) = \sum_i f(\lambda_i) |u_i\rangle \langle u_i|$,

a) calculer $\Omega = \sqrt{\Omega_2}$,

b) montrer que

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\Omega_2} t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\ \sin(\sqrt{\Omega_2} t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t) + \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) - \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) - \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) + \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. On admet que les solutions du système d'équations différentielles s'écrivent

$$X(t) = \cos(\sqrt{\Omega_2} t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \sin(\sqrt{\Omega_2} t) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

avec a, b, c, d des constantes.

Calculer la dérivée \dot{X} .

Remarque : on admet que les dérivées vérifient au sens du produit matriciel

$$\frac{d \cos(\Omega t)}{dt} = -\Omega \sin(\Omega t), \quad \frac{d \sin(\Omega t)}{dt} = \Omega \cos(\Omega t).$$

5. Etablir la forme du mouvement $X(t)$ en prenant comme conditions initiales

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dot{X}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. Dans cet exercice, on notera la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx.$$

Soit la fonction

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x)$.

2) Représenter les graphes de $f_a(x)$ et de sa transformée de Fourier pour $a = 3$.

3) Evaluer alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ka) \cos(kx)}{k} dk.$$

4) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$