Examen - Géométrie. Durée 2h00.

Exercice 1. Isométries du plan
On se place dans un plan affine euclidien de dimension 2.

1. Rappeler la classification des isométries du plan en fonction de l'ensemble des points fixes et de la conservation ou non de l'orientation.
2. On considère deux rotations r_1 et r_2 de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 distincts et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. Préciser la nature de la composée de ces deux rotations en fonction de θ_1 et θ_2.

Exercice 2. Droites et plans d'un espace affine euclidien
On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soient A le point de coordonnées $(1, 0, 4)$, B le point de coordonnées $(5, 4, -3)$, $\vec{u}$ le vecteur de composantes $(1, 2, 4)$ et $\vec{v}$ le vecteur de composantes $(-1, 2, 2)$.

1. Donner l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A dirigé par $(\vec{u}, \vec{v})$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par B perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
3. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur $\mathscr{P}$.
4. Déterminer la distance entre les deux droites $\mathscr{D}_1$ de repère $(A, \vec{u})$ et $\mathscr{D}_2$ de $(B, \vec{v})$ (on pourra utiliser les questions précédentes).

Exercice 3. Rectangles d'or
On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$. On considère un carré $ABCD$ orienté dans le sens trigonométrique et I le milieu de $[AB]$. Soit E le point d'intersection du cercle de centre I passant par C et de la demi-droite $[AB)$. Soit F le point de (DC) tel que $AEFD$ est un rectangle.

1. Calculer le rapport $\varphi = \frac{AE}{AD}$. Vérifier qu'il est racine de $x^2 = x + 1$.
2. Montrer l'égalité des rapports $\frac{AE}{AD}$ et $\frac{EF}{BE}$.

On munit le plan d'une structure complexe et on suppose que A a pour affixe 0, B pour affixe 1. On considère la similitude s envoyant A sur C et F sur E.

3. Déterminer les affixes de C, D, E et F.
4. Déterminer le rapport et la mesure de l'angle de s.
5. En déduire que les droites (AF) et (CE) sont perpendiculaires.
6. On note K le point d'intersection de (AF) et (CE), et Ω le centre de la similitude s. Montrer que K et Ω sont les points d'intersection des deux cercles $\mathscr{C}$ de diamètre $[AC]$ et $\mathscr{C}'$ de diamètre $[EF]$.

Exercice 4. Barycentres
On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$. Soient ABC un triangle non aplati orienté dans le sens trigonométrique . On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longueurs des arêtes et $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les mesures en radian des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note A_1, B_1, C_1 les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur (BC), (AC), (AB). On rappelle la relation

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} \qquad (\star)$$

où S est l'aire bordée par le triangle.

1. Donner une démonstration de cette formule $(\star)$.
2. Montrer que $b \cos \widehat{C} + c \cos \widehat{B} \neq 0$ et que A_1 est le barycentre de $\{(B, b\cos\widehat{C}), (C, c\cos\widehat{B})\}$ (on pourra utiliser les produits scalaires $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$).
3. On suppose que ABC n'est rectangle ni en B ni en C. Déduire de la question précédente et de $(\star)$ que A_1 est le barycentre de $\{(B, \tan\widehat{B}), (C, \tan\widehat{C})\}$.
4. En déduire que si ABC n'est pas rectangle, alors trois hauteurs (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont concourantes au point H barycentre de $\{(A, \tan\widehat{A}), (B, \tan\widehat{B}), (C, \tan\widehat{C})\}$.