Université de Bourgogne
Licence Sciences, Technologies, Santé, 2ème année

Lundi 7 juin 2021
13h30-15h30

Examen de Mathématiques - Session 2 - Math4B

Exercice 1 : 1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :
(a) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
(b) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et on a l'égalité si E est de dimension finie.

2. On suppose que $(E, \langle \mid \rangle)$ est un espace-vectoriel euclidien et soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme autoadjoint (symétrique) de E. Montrer que si un sous espace-vectoriel F de E est stable par f alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par f.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ -6 & 7 & 6 \\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
2. On désigne par F l'ensemble des vecteurs invariants par f : $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$. Préciser la dimension et donner une base orthonormée de F.
3. Montrer que f est une rotation vectorielle et trouver une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ orthonormale directe dans laquelle la matrice de f a une forme réduite. On précisera l'axe, le sinus et le cosinus de son angle.

Exercice 3 : On désigne par $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni du produit scalaire φ donné par

$$\forall (P,Q) \in E_n \times E_n,\ \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $f : E_n \longrightarrow E_n$ l'application définie par : $\forall P \in E_n,\ f(P) = (X^2-1)P'' + 4XP'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E_n.
2. Calculer $f(X^k)$ pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_n = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.
3. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint. Est-il diagonalisable ? Justifier.
$\left(\text{On pourra utiliser une intégration par partie de } \int_{-1}^{1} -(1-t^2)^2 P''(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)$.
4. Dans la cas $n = 2$, déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de f et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 4 : Appliquer la méthode de Gauss et réduire la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ donnée par

$$q(x,y,z,t) = xy + xz + xt + yz + yt + zt$$

et préciser sa signature et son rang.

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E, et F le sous espace vectoriel d'équation dans $\mathcal{B}$: $x + y + z = 0$.
Calculer la distance $d(e_1 - 2e_2, F)$.