L2

2ÈME SESSION – MATH4A

Durée 2h00. Tout document et appareil électronique interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Exercice 1.

(a) **(Question de cours)** Donner une preuve de l'énoncé suivant.

Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann qui converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable sur I. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

(b) Illustrer avec un exemple que l'hypothèse de convergence uniforme $f_n \to f$ est nécessaire.

Exercice 2. Discuter selon la valeur du paramètre, la nature de intégrale impropre suivante (convergente, divergente ou semi-convergente), et lorsqu'elle converge, calculer sa limite.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{3x(\ln x)^2 + x\ln x} \quad (a > 0).$$

Exercice 3. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^\infty f_n$ avec $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

(a) Montrer que $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Par la suite, on notera $S(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ la somme, pour $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que S est de classe C^∞ (infiniment dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) **(Bonus)** Montrer que S n'est pas dérivable en $x = 0$.

Exercice 4. On considère l'application entre espaces vectoriels normés

$$r : (C^0([0,2];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (C^0([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

définie par la restriction : $r(f) = f|_{[0,1]}$. Montrer que r est continue.