L2 - Math 3E

Université de Bourgogne — Année 2020-2021

Structures fondamentales — 11 juin

Rattrapage – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifiez vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1.
Soit $x \in G$. Parmi les quatre sous-ensembles de G suivants, déterminer ceux qui sont forcément des sous-groupes de G. Pour ceux qui le sont, prouver le. Pour les autres, donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que ce soit le cas (en le justifiant).
1) $A_x := \{y \in G \,|\, xy = x\}$ **2)** $B_x := \{y \in G \,|\, xyx^{-1} = x\}$
3) $C_x := \{y \in G \,|\, xyx^{-1} = y\}$ **4)** $D_x := \{y \in G \,|\, xy = y\}$

Exercice 2.
Soit H un sous-groupe de G. Rappelons que si $a \in G$ alors $aH := \{ah \,|\, h \in H\}$. Soit x et y deux éléments de G. Montrer que $xH = yH$ si et seulement si $x^{-1}y$ appartient à H.

Exercice 3.
On suppose que G est fini et d'ordre impaire.
1) Montrer que e est l'unique solution dans G à l'équation $x^2 = e$.
2) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y^2 = x$.

Exercice 4.
Supposons que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice 5.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit a un élément d'ordre k de G. Combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble

$$A := \{a^n \,|\, n \in [\![0; 2k]\!]\} \text{ ?}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 6.
Pour chaque paire de groupes suivante, déterminer tous les morphismes de groupes allant du 1er vers le 2ème puis du 2ème vers le 1er. De plus, déterminer le noyau de chacun de ces morphismes de groupes.
a) $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.
b) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
c) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.