Math 3C.

L2 : Probabilités **Date** : Mercredi 9 juin 2021 **Durée** : 2h

Examen de Probabilités : rattrapage

Exercice 1 : ▷ **1)** Soit X une v.a.r. suivant la loi $B(n,p)$.

(a) Démontrer que $\mathbb{E}[X] = np$.

(b) On pose $Y = n - X$. Déterminer la loi de Y.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? On justifiera.

▷ **2)** 100 bovins se répartissent au hasard et indépendamment les uns des autres dans trois étables E_1, E_2 et E_3. On suppose que chaque étable peut abriter la totalité du troupeau. Soit X_k la variable définie par le nombre de bovins ayant choisi l'étable E_k.

(a) Déterminer les lois de probabilités de ces trois variables.

(b) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

Exercice 2 :

▷ **1)** Soit X une v.a.r. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

(a) Exprimer $\mathbb{P}(X > n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(b) Démontrer que quelque soit $n, m \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X > n+m | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$.

▷ **2)** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(X > n) > 0$ et $\mathbb{P}(X > n+m|X > m) = \mathbb{P}(X > n)$ quelque soit $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que X est de loi géométrique.

Exercice 3 : Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1, \\ \frac{x+1}{4} & \text{si} \quad -1 \leq x < 1, \\ \frac{2}{3} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

▷ **1)** Justifier que F est une fonction de répartition.

▷ **2)** Soit Z une v.a.r. de fonction de répartition F. Calculer les probabilités suivantes : a) $\mathbb{P}(Z \leq 0)$ b) $\mathbb{P}(Z = 0)$ c) $\mathbb{P}\left(Z > \frac{3}{2}\right)$ d) $\mathbb{P}(0 \leq Z < 2)$ et e) $\mathbb{P}(Z = 1)$.

Exercice 4 : Soit $a > 0$ et f la fonction définie par $f(x) = |2x - 1| \mathbb{1}_{]0,a[}(x)$.

▷ **1)** Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

▷ **2)** Soit X une v.a. de densité f.

(a) Calculer $\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

(b) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 5 : Soient $N, n \in N^*$. On dispose de N urnes, numérotées de 1 à N. On suppose que dans l'urne numéro k il y a k boules blanches et $N-k$ boules noires, $1 \leq k \leq N$. On considère l'expérience aléatoire suivante. *On commence par choisir au hasard et uniformément une urne puis, on tire dans l'urne choisit n boules* **avec remise** *au hasard et uniformément.* On note U la v.a. représentant le numéro de l'urne choisit et B_k la v.a. représentant le nombre de boules blanches obtenues en tirant dans l'urne k, $1 \leq k \leq N$, n boules **avec remise**. On suppose que les v.a. $(B_1, \cdots, B_N)$ et U sont indépendantes et on pose

$$B_U = \sum_{n=1}^{N} B_k \mathbb{1}_{\{U=k\}}.$$

Remarquons que $B_U = B_k$ sur l'événement $\{U = k\}$ de telle sorte que B_U représente le nombre de boules blanches obtenues à l'issue de l'expérience précédente.

▷ **1)** Énoncer la formule de probabilités totales.

▷ **2)** Montrer que la probabilité de tirer j boules blanches, $0 \leq j \leq n$, est égale à

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\binom{n}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^{j}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-j}.$$

▷ **3)** Déterminer $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_U = j)$.

▷ 4) On suppose ici que $n = 2$.

(a) Calculer numériquement $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_U = 2)$.

(b) On sait que l'on a tiré deux boules blanche. Quelle est alors la probabilité que l'on ait choisit l'urne numéro 1 initialement ?

▷ 5) Reprendre la question 2) lorsque les tirages sont **sans remise**, c'est à dire lorsque l'on tire les boules dans l'urne simultanément, sans les remettre.