Université de Bourgogne — Année universitaire 2020-2021

Licence de Mathématiques Math3B

Examen

Juin 2021. Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin

Exercice 1. (Questions de cours) *(5 points)*

1. Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f de multiplicité p, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $dim(E_\lambda) \leq p$, où E_λ désigne le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de f.

2. Enoncer et démontrer le théorème spectral (sur le calcul des projecteurs spectraux).

Exercice 2. *(5 points)* Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, f un endomorphisme de E et α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Im}(f - \alpha id_E) + \mathrm{Im}(f - \beta id_E)$.

   On suppose de plus que α et β sont non nuls et que $(f - \alpha id_E) \circ (f - \beta id_E) = 0$.

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}. .
3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha id_E) \oplus \ker(f - \beta id_E)$. .
4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha id_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta id_E)$.

Exercice 3. *(10 points)* Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique P_A et le polynôme minimal μ_A de A.
2. En déduire que A est trigonalisable mais qu'elle n'est pas diagonalisable et que son spectre est $\{2, 4\}$.
   Pour la suite on note Π_2 et Π_4 les projecteurs spectraux correspondants. Notons aussi par Q_2 et Q_4 les polynômes
   $$Q_2(X) = \frac{P_A(X)}{(2-X)^2}, \quad Q_4(X) = \frac{P_A(X)}{4-X}.$$
3. Montrer que Q_2 et Q_4 sont premiers entre eux et déterminer un couple de polynômes (U_2, U_4) tel que
   $$U_2Q_2 + U_4Q_4 = 1.$$
4. Calculer les matrices de $U_2(f) \circ Q_2(f)$ et de $U_4(f) \circ Q_4(f)$.
5. Indiquer le lien entre les matrices précédentes et les projecteurs spectraux Π_2 et Π_4.
6. Calculer les matrices des endomorphismes $d = 2\Pi_2 + 4\Pi_4$ et $n = f - d$.
7. Vérifier que c'est bien la décomposition de Dunford de f.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.
9. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = & 2x + & 2y + & 2z \\ \dot{y} = & 4y & & \\ \dot{z} = & & 2y + & 2z \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = -1,\ z(0) = 0.$$