Université de Bourgogne L2. Session 2. Épreuve du 10 juin 2021

Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit $I = [0, \mathrm{e}]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Fixons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Soit $g(x) = \lfloor \frac{nx}{\mathrm{e}} \rfloor$. Montrer que g est une fonction en escalier sur I puis calculer $\int_I g$.
2. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Justifier que h est bornée sur I.
3. *Démontrer qu'une application h continue sur I est intégrable sur I.*
4. Montrer que la fonction $f(x)$ suivante est intégrable sur I et calculer $\int_I f$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } nx \in \mathbb{Z}, \\ \exp(nx) & \text{si } nx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La question en italique est une question de cours.

Exercice 2. Dire, pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie (dans ce cas, la démontrer) ou fausse (dans ce cas, donner un contre exemple).

1. Si (u_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ et on fixe $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim_{n\to\infty} u_{n^2-2kn+2k^2} = a$.
2. Soit (u_n) une suite positive avec (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergentes. Alors (u_n) converge.
3. Si une série $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n^2$ aussi.
4. Si une série entière $\sum a_n z^n$ a rayon $R > 0$ alors $\sum |a_n| R^n$ converge.

Exercice 3. Soit $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$ et $g(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$.

1. Donner le développement en série entière de f en 0 puis son rayon R.
2. Donner le développement en série entière de g en 0 puis son rayon S.
3. Montrer que f admet une primitive F définie dans $[0, R[$ avec $F(0) = 0$.
4. Développer F en série entière autour de 0. Quel est le rayon du développement ?
5. Donner le domaine de dérivabilité de g puis développer g' en série entière en 0.
6. Est-ce que le domaine de dérivabilité de g est $]-S, S[$?

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(4n)!}{(n!)^4} x^n$, b) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n^2} 2^n n x^{3n}$.

Exercice 5. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f(x)$ somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ avec :

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + cf(x) = 0, \qquad \forall x \in]-R, R[, \qquad f'(0) = 0.$$

1. Justifier que $a_n = 0$ pour n impair puis trouver une relation de récurrence sur (a_{2n}).
2. Soit $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Déterminer R.
3. Supposons $c = m(m+1)$ pour $m \in \mathbb{N}$ pair et $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Montrer que f est un polynôme. De quel degré ?