Examen - Compléments mathématiques. Durée 2h.

Exercice 1.

1. Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad 2z'' - 3z' - 2z = 0.$$

2. En déduire la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad 2y'' - 3y' - 2y = 3\,\mathrm{e}^{-x}.$$

satisfaisant les conditions $y(0) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $y' - x(y^2+1) = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Préciser l'intervalle maximal de cette solution.

Exercice 3.

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{2}{1+t^2}$.
   (a) Donner son domaine de continuité. Étudier ses variations, les limites aux bornes et dresser le tableau des variations.
   (b) On note $\Gamma = \left\{(t,u) \in \mathbb{R}^2 : u = \frac{2}{1+t^2}\right\}$ le graphe de f. Représenter Γ dans le plan avec les coordonnées (t,u).
   (c) f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $\Phi(t,u) = (u, tu)$.
   (a) Φ est-elle injective ? surjective ? Justifier.
   (b) Déterminer $\Phi^{-1}\big(\{(0,0)\}\big)$.
   (c) Soit D la droite définie par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$. Déterminer $\Phi^{-1}(D)$.
   (d) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On rappelle que $\Gamma = \left\{(t,u) \in \mathbb{R}^2 : u = \frac{2}{1+t^2}\right\}$.
      i. Montrer que $(x,y) \in \Phi(\Gamma)$ si et seulement si $x^2 + y^2 = 2x$.
      ii. En déduire que $\Phi(\Gamma)$ est le cercle de centre $(1,0)$ de rayon 1.

Exercice 4.

1. Déterminer les ensembles suivants :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{n+1}{n} ; \frac{2n+1}{n} \right[\qquad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{n+1}{n} ; \frac{2n+1}{n} \right]$$

2. Exprimer l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $(\cos x - \frac{1}{2})(\sin x - \frac{1}{2}) < 0$ au moyen des opérateurs $\bigcap$ et $\bigcup$.