UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE — ANNÉE 2020-2021
U.F.R. Sciences et Techniques — 18 juin 2021
L1-Math 2B : Algèbre linéaire et géométrie

Examen : Session 2
Durée : 2 heures

(1) **(4 points)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
  (a) Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $f : E \to E$ un endomorphisme, et $A = Mat(f; \mathcal{B})$ Indiquer, pour chaque assertion suivante, si elle est VRAIE ou FAUSSE (sans justification) :
    (i) L'intersection du noyau $\ker(f)$ et de l'image $Im(f)$ est toujours égale à $\{0\}$.
    (ii) Soient $\mathcal{B}'$ une autre base de E, et soit $A' = Mat(f; \mathcal{B}')$. Alors $\det(A) = \det(A')$.
    (iii) Soit $B = Mat(f; \mathcal{B}; \mathcal{B}')$. Alors $det(A) = det(B)$.
  (b) (Question de cours) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
    (i) Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou bien $F_2 \subset F_1$.
    (ii) Montrer que $F_1 + F_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par F_1 et F_2.

Pour le reste de l'examen :JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

(2) **(4 points)**
  (a) Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs du nombre réel c le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - cx_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -cx_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

  a zéro, une, ou une infinité de solutions.
  (b) Résoudre le système pour $c = 1$.

(3) **(2 points)** Soit. $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible, et trouver l'inverse M^{-1} de M.

(4) **(5 points)**. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.
  (a) Donner le polynôme caractéristique de M, et déterminer les valeurs propres de M.
  (b) Soit $\mathcal{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $Mat(f, \mathcal{C}_3) = M$. Déterminer les espaces propres de f.
  (c) Est-ce que M est diagonalisable? Si oui, donner une matrice P tel que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, et déterminer la matrice D.
  (d) Soit $A_c = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs $c \in \mathbb{R}$ est-ce que la matrice A_c est diagonalisable ?

(5) **(5 points)**. Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3. Soit $F \subset E$ le sous-ensemble

$$F = \{P \in E | P(1) = 0\}.$$

  (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
  (b) Trouver la dimension de F et une base $\mathcal{B}$ de F.
  (c) Soit $f : F \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(P) = (P(0), P'(0))$. Montrer que f est une application linéaire.
  (d) Déterminer la matrice $Mat(f; \mathcal{B}; \mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.