Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2020-2021
Juin 2021

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de cours 1. Rappelons que, pour tous entiers k, n tels que $n \geq 1$ et $k \leq n$, le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{k}$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Montrer que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(3) Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Question de cours 2.

(1) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$.

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z = \bar{z}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

(3) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z|^2 = z\,\bar{z}$, $|\bar{z}| = |z|$ et $|zz'| = |z| \times |z'|$.

(4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Exercice 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes puis donner leurs négations.

(1) f est bornée.

(2) f est paire.

(3) f est monotone.

(4) f n'est pas une fonction constante.

Exercice 2.

(1) Calculer une équation complexe de la droite passant par $(-1, 3)$ et $(2, -1)$.

(2) Calculer l'équation complexe du cercle de centre $(-6, 1)$ passant par $(-8, 9)$.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux. Est-ce que la réciproque est vraie ?