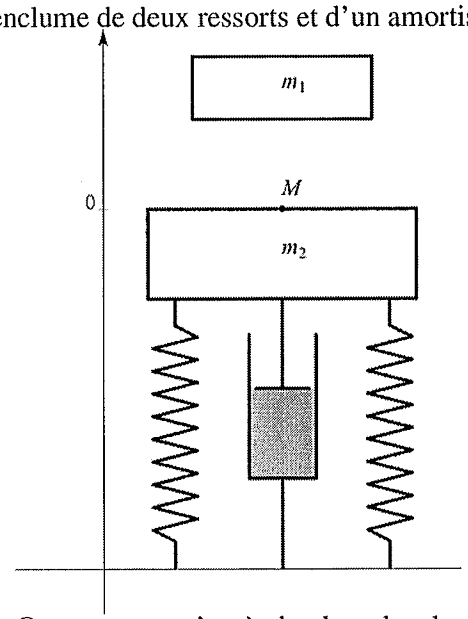
Exercice 1 – **Dérivées et différentielles de fonctions (barème approximatif 2 points)**
Exprimer la dérivée $f'(t) = \frac{df}{dt}$ et la différentielle df des fonctions suivantes :

1. $f(t) = e^{i\omega t}$
2. $f(t) = \ln(a - t)$

Exercice 2 – **Amortisseurs d'enclume (barème approximatif 6 points)**
Pour éviter les perturbations crées par les vibrations lors du choc d'un marteau sur une enclume, on munit l'enclume de deux ressorts et d'un amortisseur selon le schéma ci-dessous :



masse du marteau : $m_1 = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$
masse de l'enclume : $m_2 = 14{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$
constante de raideur d'un ressort : $k = 183 \cdot 10^4\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$
constante de l'amortisseur : $\mu = 2{,}40 \cdot 10^4\,\mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$

On suppose qu'après le choc, les deux parties (marteau+enclume) restent solidaires. La cote du point M à l'instant t est repérée par $z(t)$ mesurée sur l'axe indiqué sur le schéma. On choisit l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où l'ensemble (marteau+enclume) arrive au point le plus bas de la première oscillation.

La cote $z(t)$ (mesurée en mètres) est solution de l'équation différentielle :

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{dz}{dt} + 2kz = 0$$

1. Mettre cette équation sous la forme usuelle :
$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0 \tag{1}$$
en indiquant les expressions de λ et ω_0. On rappelle que $z'' = \frac{d^2z}{dt^2}$ et $z' = \frac{dz}{dt}$.
2. Calculer λ et ω_0.
3. On note $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Calculer Ω.
4. Donner la solution générale de l'équation différentielle (1).
5. Les mesures initiales pour $t = 0$ sont : $z(0) = -50{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ et $z'(0) = 0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Exprimer la solution de l'équation différentielle (1) qui vérifie ces deux conditions.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ – **Nombres complexes (barème approximatif 4 points)**

1. Résoudre l'équation $2z^2 + (3i)z + 2 = 0$.
2. Mettre $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)$ sous forme exponentielle.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ – **Équations différentielles (barème approximatif 2 points)**

Résoudre les équations suivantes :

1. $y" + 5y' + 4y = 8$.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$ – **Cinétique chimique (barème approximatif 6 points)**

On suit la cinétique de la réaction d'addition du dibrome Br_2 sur l'éthylène C_2H_4 en maintenant la température constante. Le bilan de la réaction est :

$$H_2C = CH_2 + Br_2 \rightarrow BrH_2C - CH_2Br \tag{2}$$

On souhaite connaître l'évolution de la concentration en $BrH_2C - CH_2Br$ en fonction du temps t. Expérimentalement, on montre que la vitesse de la réaction peut s'écrire : $v = k[C_2H_4]_t[Br_2]_t$, où $[C_2H_4]_t$ désigne la concentration en éthylène à l'instant t, et $[Br_2]_t$ la concentration en dibrome au même instant et k la constante de vitesse de la réaction. Par définition, la vitesse v s'exprime également grâce à la relation $v = -\frac{d[C_2H_4]_t}{dt} = -\frac{d[Br_2]_t}{dt}$. On note x l'avancement de la réaction à l'instant t. On a donc $[C_2H_4]_t = [C_2H_4]_0 - x$ et $[Br_2]_t = [Br_2]_0 - x$. On considère une réaction dans laquelle les réactifs sont mis en proportion stœchiométrique, c'est à dire $[C_2H_4]_0 = [Br_2]_0 = C_0$, où C_0 est une constante connue.

1. Justifier que l'on a $[C_2H_4]_t = [Br_2]_t$ pour tout t.
2. On peut donc écrire $v = k\left([C_2H_4]_t\right)^2$. En déduire que la concentration en éthylène est régie par l'équation différentielle :
$$\frac{d[C_2H_4]_t}{dt} = -k\left([C_2H_4]_t\right)^2 \tag{3}$$
3. Établir l'expression $[C_2H_4]_t = f(t)$.
4. On souhaite déterminer la valeur de la constante de vitesse k à partir d'une mise en graphique simple, une droite.
   (a) Obtient-on une droite en traçant $[C_2H_4]_t$ en fonction du temps t ?
   (b) Sinon, quelle mise en graphique doit-on faire ?
   (c) Comment pourra-t-on déterminer k à partir du tracé choisi ?