UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Sciences & Techniques

Licence deuxième année.
Mathématiques MaIE3A
Examen du 10/06/2021 Durée : 2 heures.

Documents, ordinateurs, calculettes et téléphones portables interdits pendant l'épreuve.

Exercice 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$.

1) 1-a) Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$
   1-b) Calculer les racines complexes z_1 et z_2 de P.
   1-c) Représenter, dans $\mathcal{P}$, les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2. Que peut-on dire du triangle OM_1M_2?

2) 2-a) Vérifier que : $(1+i)z - 2i = (1+i)(z-1-i)$
   2-b) Déterminer géométriquement l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z tels que : $|(1+i)z - 2i| = 2$. *(utiliser la question précédente)*
   2-c) Soit S la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z - 2i$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$M(t)\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2\ln(1+t) - 2t \\ y(t) & = & e^t - t \end{array}\right.$$

1) Donner un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t = 0$.

2) En déduire les coordonnées du point stationnaire. Dessiner l'allure de la courbe en ce point. On précisera le sens de déplacement.

Exercice 3

1) Calculer $I_1 = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$. On posera $u = \ln x$

2) Calculer $I_2 = \int_0^1 xe^{2x} dx$

3) Calculer $I_3 = \int_0^\pi \cos^2(2x) dx$.

4) 4-a) Déterminer a, b, c tels que $\frac{1}{x(x-1)(2x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2x-1}$
   4-b) Calculer $J = \int \frac{1}{x(x-1)(2x-1)} dx$

Exercice 4

On veut étudier, en fonction du temps t (en secondes), la charge $Q(t)$ (en Coulomb) d'un condensateur électrique de capacité C (en Farad). On relie ses deux bornes à une source de tension continue V (en Volts), à travers une résistance R (en Ohms).
On sait que : $\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{V}{R}$ (E).

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

2) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).

3) Déterminer la solution $Q(t)$ de l'équation (E) sachant qu'au temps $t = 0$: $Q(0) = 0$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $(E) : y" + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$.

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

2) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $y_p = e^{-2x}Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à chercher. En déduire les solutions de (E).