Contrôle — session 2

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n = \dfrac{n^2+\cos(n)}{n-5}$, $b_n = \dfrac{n^2-\sin(n)}{n-3}$ divergent (plus précisément elles convergent vers l'infini).

   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ en justifiant les étapes du calcul.

2. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 4$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le terme général de la suite.

3. Pour répondre aux deux questions suivantes, utilisez la convergence/divergence de certaines séries bien connues et traitées dans le cours.

   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(1+n)^2}$ diverge.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n)}{(1+n)^2}$ converge.

4. Pour les deux matrices suivantes, décider si elles sont inversibles, et calculer l'inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

   (Pour éviter de faire trop de calculs, regardez : Il n'y a qu'un seul coéfficient qui est différent.)

5. Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} x &+2y+3z &= a \\ 3x &+2y+z &= b \\ 2x &+2y+2z &= c \end{aligned}$$

   (a) une fois avec $a = 0, b = 4, c = 2$,

   (b) et une fois avec $a = 2, b = 4, c = 0$.

6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

   et soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(v) = Av$. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.