

Session 2- Vendredi 11 juin 2021 (45 min.)

2 exercices à traiter - Calculatrices non autorisées

Exercice 1 : Questions de cours

- Rappeler la différence entre l'interpolation et l'approximation de données.
- Soient 4 points $(-2,4)$, $(0,0)$, $(1,0)$ et $(2,4)$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation P aux points donnés ci-dessus (**justifiez votre réponse**) ?

— $P(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{8}{3}x$

— $P(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}$

— $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x$

- Citer une méthode numérique d'interpolation vue en CM et implémentée en TD.
- Soient I un intervalle de \mathbb{R} , a un point intérieur à I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On fixe n un entier naturel. On rappelle la formule de Taylor pour une fonction f de classe C^n sur un intervalle I : Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$, on peut écrire :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + O(h^{n+1})$$

- 4.1. A l'aide de la formule de Taylor, exprimer $f(x_i + h)$ et $f(x_i - h)$ à l'ordre $n = 2$.
- 4.2. En déduire que :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

- 4.3. Comment s'appelle cette formule de dérivation numérique ?
- 4.4. Citer une autre formule de dérivation numérique (dérivée première) vue en CM et donner la formule correspondante.
5. Soit le système d'équations linéaires $AX = B$, avec A une matrice tridiagonale.
 - 5.1. Rappeler la définition d'une matrice tridiagonale.
 - 5.2. Quelle méthode vue en CM et implémentée en TD permet de résoudre un tel système de manière simple et rapide ?

Exercice 2 : Programmation

Rappel : le calcul numérique de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ par la méthode des rectangles est donnée par l'expression

$$I_R = h \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

avec x_i la variable x discrétisée sur l'intervalle $[a, b]$ en $N + 1$ points et h le pas de discrétisation.

- Écrire la fonction MATLAB/Octave d'en-tête `function IR=rect(f,a,b,N)` qui effectue le calcul numérique de l'intégrale à partir de la formule donnée ci-dessus. Les entrées de la fonction `rect` sont : la fonction f , les valeurs des extrémités de l'intervalle $[a, b]$ et le nombre de segments de discrétisation N . La sortie de la fonction `rect` est la valeur numérique de l'intégrale I_R .
- Écrire la partie TEST sur l'exemple $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $N = 1000$.
- Enfin, donner la syntaxe MATLAB/Octave pour le calcul de l'erreur absolue.