EXAMEN L2 INFO3A, session 2, 9 juin 2021

1. Arithmétique. **1.1.** $a = 42, b = 18$. Calculez $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = PGCD(a, b)$ avec l'algorithme d'Euclide généralisé, avec la présentation en tableau. Les colonnes sont : $a, b, r = a \bmod b, q = a \div b, PGCD, u, v$. La dernière ligne contient 1 dans la colonne u et 0 dans la colonne v.

1.2. Idem, mais la dernière ligne contient 1 colonne u et k colonne v.

1.3. Calculez g, u, v avec la formulation matricielle. Pas de k.

2. Suite K. La fonction $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par : $K(n) = a_1 K(n-1) + a_2 K(n-2) + c$ pour $n > 1$, avec $K(0), K(1), a_1, a_2, c \in \mathbb{N}$ donnés.

2.1. En 3 lignes, que vaut la matrice M dans :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ K(n-1) \\ K(n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ K(n-2) \\ K(n-1) \end{pmatrix} = M^p \begin{pmatrix} 1 \\ K(0) \\ K(1) \end{pmatrix}$$

2.2. Que vaut p dans la question précédente ?

2.3. Proposez une méthode rapide pour calculer $K(n)$. (1 ligne)

2.4. Quelle est sa complexité avec la notation $O()$? (1 ligne)

2.5. Généralisez le calcul de $K(n)$ avec n entier relatif négatif (1 ligne).

3. Somme des étiquettes. **3.1.** On considère un arbre binaire équilibré complet de n niveaux : il a $2^n - 1$ sommets, dont 2^{n-1} feuilles. Tout sommet est étiqueté par son niveau (1 pour une feuille; n pour la racine). Soit $S(n)$ la somme des étiquettes des sommets. Trouvez 1 ou 2 formules récursives pour $S(n)$, $n > 1$. (1 ou 2 lignes)

3.2. Trouvez une formule non récursive pour $S(n)$. (1 ligne)

4. Dessinez le graphe réduit des CFC du graphe G de la Fig. 1.

5. **5.1.** Le graphe en Fig. 2 a un flot de 20. Dessinez le.

5.2. Dessinez une coupe de capacité 20.

Rappel : en chaque sommet différent de la source (A) et du puits (E), la somme des flots entrants égale la somme des flots sortants. Dans chaque arc, le flot doit être non négatif et inférieur ou égal à la capacité de l'arc. Le débit d'un flot est la somme des flots sortants de la source, et la somme des flots entrants du puits.

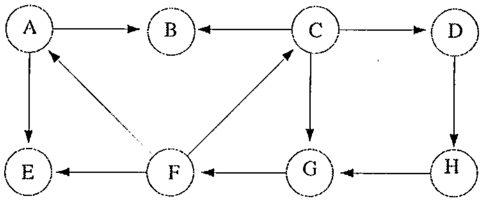

Figure 1: CFC et graphe réduit de ce graphe ?

Rappel : une coupe partitionne les sommets en deux parties, une avec la source, l'autre avec le puits. Les arcs de la coupe sont ceux de la partie source vers la partie puits. Sa capacité est la somme des capacités de ses arcs. Tous les flots franchissent toutes les coupes, donc le débit du flot maximal égale la capacité de la coupe minimale.

6. Chemin critique et séquences. **6.1.** Rappelez les formules pour les dates au plus tôt et au plus tard des sommets dans un graphe acyclique G, ayant une seule source et un seul puits. Les arcs portent des durées.

6.2. Soient $H = ACBACB$ et $V = ABCBA$ deux séquences. Calculez la (ou les) séquence commune la plus longue entre H et V. Ramenez ce problème à un problème de chemin critique dans un graphe que vous dessinerez.

Rappel. Les sommets de ce graphe sont des paires (i, j) telles que $H_i = V_j$. Il y a un arc $(i_1, j_1) \to (i_2, j_2)$ ssi ces deux sommets existent et $i_1 < i_2$ et $j_1 < j_2$. Vous ajouterez un sommet source et un sommet puits. Il est inutile de dessiner les arcs de transitivité. Tous les arcs sont de durée 1. Calculez et notez sur les sommets leur date au plus tôt et au plus tard.

7. Arbre couvrant optimal. Dessinez l'arbre couvrant de coût minimal du graphe de la Fig. 2 : ignorez l'orientation des arcs et considérez les capacités comme des coûts.

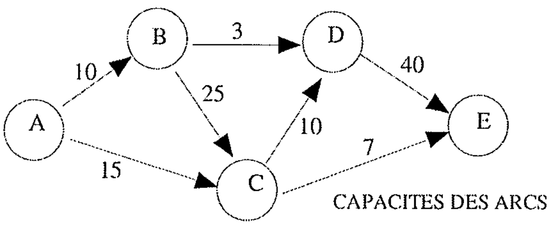

Figure 2: Capacité des arcs pour le flot.