

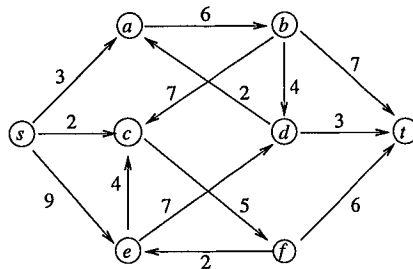
Durée 2h, tous documents autorisés
Sujet recto/verso, le barème est donné à titre indicatif

1. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un exemple de graphe G non vide satisfaisant la contrainte s'il en existe :

- (a) $\chi(G) = \Delta(G) - 2$
- (b) $\chi'(G) = \omega(G) + 1$
- (c) $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$
- (d) $\chi(G) = \chi'(G) = 4$

2. Soit le réseau ci-après.

- (a) Le graphe orienté obtenu en supprimant les sommets s et t (et tous les arcs ayant pour origine ou extrémité un de ces deux sommets) est-il connexe? fortement connexe? justifier.
- (b) Donner l'arbre produit par l'algorithme BFS puis DFS exécuté à partir du sommet a , en tenant compte de l'orientation des arcs (on supposera que les voisins d'un sommet sont pris par ordre alphabétique).
- (c) Même question à partir du sommet s .
- (d) En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, trouver le trafic maximum entre les villes s et t . La liste des chaînes augmentantes sera présentée en ordre décroissant des valeurs.
- (e) Justifier la réponse en exhibant une coupe minimum.
- (f) Peut-on trouver un flot maximum qui sature l'arc fe ? Justifier.



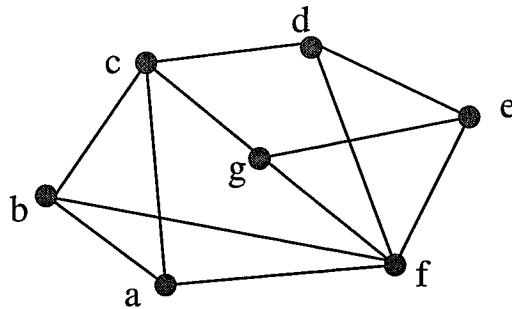
3. Soit le problème suivant : on souhaite ouvrir un zoo avec n familles différentes d'animaux F_1, F_2, \dots, F_n . Certains animaux ne doivent pas être en contact (par exemple les lions et les gazelles). Combien d'enclos, au minimum, sont nécessaires ?

Questions :

- (a) Modéliser ce problème en terme de coloration de graphe. On indiquera en particulier comment le graphe est construit et la coloration à effectuer pour répondre au problème.
- (b) Dessiner le graphe obtenu pour $n = 6$ avec les incompatibilités $(F_1, F_2), (F_1, F_4), (F_1, F_5), (F_2, F_3), (F_3, F_5), (F_3, F_6), (F_4, F_5), (F_5, F_2), (F_5, F_6)$ et donner une affectation optimale des enclos.

Tourner la page SVP

4. Pour le graphe suivant :



- (a) Lister toutes les paires de sommets (x, y) non adjacents du graphe en indiquant leur nombre de voisins communs $vc(x, y)$.
- (b) Quelle séquence de contraction de paires de sommets permet de conclure que le graphe est 3-coloriable? Dessiner l'arbre de Zykov correspondant.
- (c) Donner un ordre de coloration des sommets de ce graphe pour lequel l'algorithme glouton exécuté avec cet ordre **ne produit pas** une coloration optimale.
- (d) Donner l'arbre obtenu par l'algorithme de PRIM si les coûts sur les arêtes sont tels que définis ci-dessous. On indiquera l'ordre d'ajout des arêtes dans l'arbre.

AB	AD	AE	AF	BC	BE	CD	CF	CH	DE	DG	EH	FG	FH	GH
3	2	5	3	2	2	1	3	2	2	2	2	5	6	12