L3 maths

Université de Bourgogne, Mathématiques Année universitaire 2020–2021

Géométrie des courbes et des surfaces (LMo6G1)

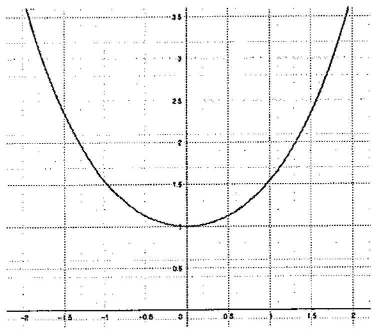
Examen de seconde session

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1 (Étude de la chaînette).

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ une constante. La *chaînette* est la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(t) := \big(t, c\cosh(t/c)\big).$$



On a partiellement illustré ci-contre son support $\alpha(\mathbb{R})$ pour la constante $c := 1$.

(1) La courbe paramétrée α est-elle régulière ou singulière ?

(2) Calculer la courbure κ de α.

(3) Calculer, partout où elle est définie, la développée δ de la courbe α. La courbe paramétrée δ est-elle régulière ou singulière ?

(4) La courbe α possède-t-elle des branches infinies ? Si tel est le cas, déterminer la nature de chaque branche infinie.

Exercice 2 (Question de cours). On va reproduire ici une partie de la démonstration du théorème fondamental des courbes dans l'espace, telle qu'elle a été vue en cours. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soient $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions lisses telles que $\kappa(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(1) Rappeler les équations de Frenet qui régissent le repère de Frenet $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ de toute courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, birégulière et paramétrée par longueur d'arc, dont κ serait la courbure et dont τ serait la torsion. Puis, réécrire ces équations de Frenet sous une forme matricielle

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{T}' \\ \mathrm{N}' \\ \mathrm{B}' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

où l'application $U : I \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ devra être explicitée.

Dans la suite, on fixe $s_0 \in I$ ainsi qu'une base orthonormée directe $(\mathrm{T}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{B}_0)$ de $\mathbb{R}^3$, et on note $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ l'unique solution de $(*)$ qui vaut $(\mathrm{T}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{B}_0)$ en s_0.

(2) Soit $Q : I \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$Q(s) := \begin{pmatrix} \mathrm{T}(s) \\ \mathrm{N}(s) \\ \mathrm{B}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{T}(s) \\ \mathrm{N}(s) \\ \mathrm{B}(s) \end{pmatrix}^t .$$

Montrer que Q est constante. Que peut-on en déduire au sujet de la famille $(\mathrm{T}(s), \mathrm{N}(s), \mathrm{B}(s))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour tout $s \in I$?

(3) Montrer qu'il existe une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ avec les propriétés suivantes : (i) α est birégulière et paramétrée par longueur d'arc ; (ii) la courbure de α est la fonction κ ; (iii) la torsion de α est la fonction τ.

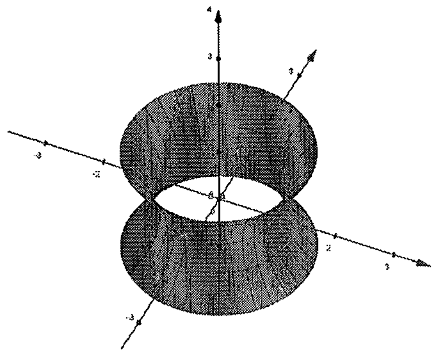
(4) Énoncer (sans démonstration) la partie du théorème fondamental des courbes dans l'espace qui n'a pas été traitée dans cet exercice.

Exercice 3 (Étude du caténoïde).

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ une constante. On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := (c \cosh(v/c) \cos(u), c \cosh(v/c) \sin(u), v)$$

Son support $S := \varphi(\mathbb{R}^2)$ est appelé *caténoïde*, et on l'a partiellement illustré ci-contre pour la constante $c := 1$.



On fixe un point $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, et on note $p := \varphi(r, s) \in S$, $f := \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(r, s)$, $g := \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(r, s)$.

(1) La nappe paramétrée φ est-elle régulière ou singulière ?

(2) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.

(3) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.

(4) Calculer la courbure de Gauss K_p et en déduire la nature du point p (parabolique / elliptique / hyperbolique) en distinguant les cas si nécessaire.

(5) Montrer que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera la dimension. (On pourra utiliser une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, dont S sera le lieu des zéros.)

(6) Quelle relation existe-t-il entre le caténoïde et la chaînette étudiée dans l'Exercice 1 ?