Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques

L3 Mathématiques
UE-Intégration.

Calcul intégral

Session de rattrapage - 22 juin 2021
durée : 2h

Notations. Dans ce devoir, $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue λ. Pour alléger les notations on notera $\mathrm{d}t$ à la place de $\mathrm{d}\lambda(t)$. De même, on notera λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et on pourra utliser la notation $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la place de $\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

EXERCICE 1.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que la famille de réels $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit sommable et calculer sa somme.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $u_k(t) = t\,\mathrm{e}^{-kt}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)$.
   (a) Calculer $\int_0^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Étudier le comportement de la suite $\big(g_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $t > 0$ et calculer $g(t) = \lim_{n\to+\infty} g_n(t)$.
   (c) En utilisant un théorème du cours que vous citerez et dont vous vérifierez que les hypothèses sont satisfaites, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $v_k(t) = \sin(at)\,\mathrm{e}^{-kt}$ et $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t)$.
   (a) Montrer que v_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $\int_0^{+\infty} v_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{k^2+a^2}$.
   (b) Pour $t > 0$, calculer la limite de suite $\big(f_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n \to +\infty$.
   (c) En utilisant un théorème du cours que vous citerez et dont vous vérifierez que les hypothèses sont satisfaites, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\sin(at)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\geq 1} \frac{a}{k^2+a^2}$.

***

EXERCICE 2. On considère la fonction f définie pour $(x,y) \neq (0,0)$ par : $f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.
On note $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < x^2+y^2 < 2x\}$.

1. Représenter l'ensemble V.
2. On considère le changement de variables en coordonnées polaires :
$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}_+\times]-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & H(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y) \end{array}$$
   (a) Déterminer $U = H^{-1}(V)$.
   (b) Représenter U.
3. En utilisant ce changement de variables et en citant les théorèmes du cours utilisés :
   (a) Montrer que f est intégrable sur V pour la mesure de Lebesgue λ_2 de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer $\int_V f\,\mathrm{d}\lambda_2$.
4. La fonction f est-elle intégrable sur le disque ouvert D centré en $(1,0)$ et de rayon 1 ? Justifier.

***