Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Juin 2021

CALCUL DIFFERENTIEL - SESSION DE RATTRAPAGE

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I (*4 pts*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit f une *forme linéaire* sur E, c'est-à-dire une application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère une norme $\|\cdot\|$ sur E.

1. **(*2 pts*)** Montrer que $N\colon E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| + |f(x)|$ est une norme sur E.
2. **(*2 pts*)** Déduire la question précédente et de l'hypothèse de l'énoncé que toutes les formes linéaires sur E sont continues.

II (*8 pts*)

On condidère l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y - x^2, y + |x|)$.

1. **(*2 pts*)** Déterminer le plus grand ouvert W sur lequel f est un C^1-difféomorphisme local.
2. **(*3 pts*)**Déterminer trois sous-ensembles V_0, V_1 et V_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathbb{R}^2 = V_0 \cup V_1 \cup V_2$, et tels que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on ait :
   (a) $(u,v) \in V_0$ si et seulement si (u,v) n'admet pas d'antécédent par f;
   (b) $(u,v) \in V_1$ si et seulement si (u,v) admet un et un seul antécédent par f;
   (c) $(u,v) \in V_2$ si et seulement si (u,v) admet exactement deux antécédents par f.
3.
   (a) **(*1 pt*)** Trouver un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contenant le point $(-1,0)$ tel que $f|_U\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to f(U)$ soit un C^1-difféomorphisme.
   (b) **(*1 pt*)** Déterminer $f(U)$.
   (c) **(*1 pt*)** Calculer $(f|_U)^{-1}$.

III (*8 pts*)

On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (4x^3 - 6xy)z + 4y^3 - 3x^2y^2 = 0\}$.

1. **(*2 pts*)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \{(t,t^2,t^3) : t \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ contenue dans $\mathcal{S}$.
2. **(*2 pts*)** Montrer que $\mathcal{S}$ n'est une sous-variété de dimension 2 en aucun point de $\mathcal{C}$ (on dit que $\mathcal{C}$ est une *arrête de rebroussement* de $\mathcal{S}$).
3. **(*2 pts*)** Pour $t \in \mathbb{R}$, Soit $\mathcal{D}_t$ la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(t) = (t,t^2,t^3)$. Montrer que $\mathcal{D}_t \subset \mathcal{S}$.
4. **(*2 pts*)** Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que les plans tangents à $\mathcal{S}$ aux points de $\mathcal{D}_t$ sont tous parallèles.