

Exercice 1

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1^2 - 2x_2 + u \end{cases} \quad (1)$$

- 1) Démontrer que le triplet $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (\sqrt{1/5}, 0, 1)$ correspondant à un point de fonctionnement.
- 2) Démontrer que la linéarisation du système (1) autour du point de fonctionnement $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (\sqrt{1/5}, 0, 1)$ donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u \quad (2)$$

Nous pouvons écrire le nouveau système linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \quad (3)$$

Où $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ est le nouveau vecteur de variables d'état et U est la nouvelle commande.

- 3) Analyser la stabilité du système (3).
- 4) Trouver le gain $K = [k_1 \quad k_2]$ de la commande $u = -KX$ qui stabilise le système (3). Les pôles désirés du système stabilisé sont $(-2, -1)$.

Concernant la sortie (mesure) du système, nous avons 2 cas :

a) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$

b) $Y = X_1 + 3X_2$

- 5) Analyser l'observabilité du système dans les deux cas et donner la partie observable dans chacun des deux cas.
- 6) concevoir un observateur de Luenberger pour le cas (a). Les pôles désirés de l'observateur sont $(-2, -1)$. Le choix de ces pôles par rapport à la commande précédente est-il judicieux ? Justifier.

Exercice 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (4)$$

1) Est ce que la variable $X_2(t)$ est commandable? Justifier.

2) Donner l'expression de la solution $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$ dans le cas d'une entrée quelconque, un

$$t_0 = 0 \text{ et un état initial } X(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3) Donner la solution $X_1(t)$ dans le cas : $U(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ (5)

Donner la solution $X_2(t)$ dans le cas discret pour une période d'échantillonnage T_e .