L3 maths

Université de Bourgogne L3 Analyse Fonctionnelle Année académique 2020–2021

EXAMEN 24 JUIN 2021

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Espaces L^p - 9 points). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $p, q \in [1, \infty]$ un couple d'exposants conjugués, *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$
Indication : on pourra utiliser que si $p, q \in]1, \infty[$ est un couple d'exposants conjugués alors pour tout réels positifs a, b, on a
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
2. Soient $p_0 \in [1, \infty[$ et $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, $f \neq 0$ au sens des éléments de L^p.
   (a) Montrer que $f \in L^p(\mu)$ pour tout $p \in [p_0, \infty[$ et
   $$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{\frac{p-p_0}{p}} \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}}.$$
   En déduire que pour tout $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, $\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.
   (b) Pour tout $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, on considère $S_\varepsilon = \{x \in E, |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Montrer que $\mu(S_\varepsilon) > 0$ et que pour tout $p \in [p_0, \infty[$
   $$\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(S_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$
   En déduire $\mu(S_\varepsilon) < \infty$ et $\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.
   (c) Déterminer $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p$.
3. En utilisant l'inégalité d'Hölder, montrer que si $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ pour $1 \leq p < q < \infty$ alors $f \in L^r(\mu)$ pour tout $r \in [p, q]$.

Exercice 2 (Espaces de Hilbert - 12 points). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ et A une partie de $\mathcal{H}$, on note $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. *Rappel : tout $x \in \mathcal{H}$ admet une décomposition unique $x = Px + Qx$ avec $Px \in M$ la projection orthogonale sur M et $Qx \in M^\perp$ la projection orthogonale sur $M^\perp$.*
   (a) Montrer que $M = (M^\perp)^\perp$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{H}$,
   $$\|Px\| = \sup_{y \in M, \|y\|=1} |\langle x, y \rangle|.$$
   (c) En déduire
   $$d(x, M^\perp) = \sup_{y \in M, \|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$$
   pour tout $x \in \mathcal{H}$.
2. Soient $\mathcal{H} = L^2([-1, 1], \lambda)$ avec λ la mesure de Lebesgue et $V = \mathrm{vect}(\{1, x\})$.
   (a) Montrer que
   $$\inf_{\alpha, \beta \in \mathbb{C}} \int_{-1}^{1} |x^2 - \alpha x - \beta|^2 \, d\lambda(x) = d(x^2, V)^2.$$
   (b) Écrire $x^2 \in \mathcal{H}$ sous la forme $x^2 = P(x^2) + Q(x^2)$ avec $P(x^2) \in V$ et $Q(x^2) \in V^\perp$. *Indication : utiliser le fait que $x^2 - P(x^2) \in V^\perp$.*
   (c) Calculer $d(x^2, V)$.
   (d) En utilisant les questions précedentes, déduire la valeur de $\sup_{g \in G} |\int_{-1}^{1} x^2 g(x) \, d\lambda(x)|$ avec $G = \{g \in \mathcal{H}, \int_{-1}^{1} g \, d\lambda = \int_{-1}^{1} xg \, d\lambda = 0$ et $\int_{-1}^{1} |g|^2 \, d\lambda = 1\}$.