UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
L3-Algèbre linéaire et bilinéaire

L3 Maths

ANNÉE 2020-2021
16 juin 2021

Examen : Session 2
Durée : 3 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Le barème est donné à titre indicatif et pourra subir éventuellement quelques modifications.

Exercice I (3 points)

1. Soit $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques de taille n. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel. Déterminer sa dimension.
2. Soit $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices hermitiennes de taille n. Est-ce que $\mathcal{H}_n$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel ? Si oui, quelle est sa dimension ?
3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que $a_{ii} > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Exercice II (5 points)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n, avec coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Pour chaque $A \in E$, soit $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_A(M) = tr(AM)$. Montrer que l'ensemble $\{\varphi_A \mid A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ est l'espace dual E^* de E.
2. Soit $F_1 = \{\lambda Id_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset E$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices scalaires. Déterminer le sous-espace orthgonal $F_1^\perp \subset E^*$.
3. Soit $F_2 = \{M \in E \mid tr(M) = 0\} \subset E$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices de trace nulle. Déterminer le sous-espace orthgonal $F_2^\perp \subset E^*$.

Exercice III (7 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une base de chaque sous-espace propre de A.
3. Calculer le polynôme minimal de A.
4. Déterminer la réduction de Frobenius de A.
5. Déterminer la réduction de Jordan de A, après avoir justifié que celle-ci existe.
6. En déduire la décomposition de Dunford de A.
7. Soient B et $B' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ deux matrices ayant le même polynôme caractéristique $\chi \in \mathbb{R}[X]$ et le même polynôme minimal $\mu \in \mathbb{R}[X]$. On suppose aussi que χ n'est pas de la forme $(X - \lambda)^4$. Montrer que B et B' sont semblables.

Exercice IV (3 points)

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   Trouver une matrice $U \in U_2(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que $U^*BU = D$.

2. Déterminer toutes les matrices unitaires $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Exercice V (6 points)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ≥ 2. Si q est une forme quadratique, le cône d'isotropie, noté $C(q)$, est défini par :

$$C(q) = \{v \in E \mid q(v) = 0\}.$$

1. Pour chaque $n \geq 2$, donner un exemple de E de dimension n et q une forme quadratique non dégénérée sur E dont le cône d'isotropie $C(q)$ est non-trivial (c'est-à-dire telle que $C(q) \neq \{0_E\}$).

   Pour la suite de l'exercice, on fixe q une forme quadratique non dégéneree telle que le cône d'isotropie $C(q)$ est non-trivial.

2. Soit $x \in C(q)$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe $y \in C(q)$ qui est linéairement indépendant de x. (Indication : Soit b la forme polaire de q. Montrer qu'on peut trouver $y_0 \in E$ telle que $b(x, y_0) \neq 0$. On peut alors chercher $y \in C(q)$ dans le plan engendré par x et y_0.)
3. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs isotropes. (Indication : Montrer d'abord qu'il existe une base $(x, y_2, \ldots, y_n)$ de E telle que $b(x, y_i) \neq 0$ pour $i = 2, \ldots, n$.)