Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Mardi 22 juin 2021
9h-12h

Examen d'Algèbre 2 Session 2 -

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer le premier théorème d'isomorphisme.
2. Donner la définition d'un produit semi-direct de deux groupes.
3. Soient H, Q et G trois groupes.
   (a) Donner la définition d'une suite exacte courte scindée.
   (b) Énoncer le théorème de caractérisation de produit semi-direct par les suites exactes.
4. Soit p un nombre premier.
   (a) Donner la définition d'un $p-$groupe.
   (b) Démontrer que le centre d'un $p-$groupe n'est pas trivial.

Exercice 2 (Questions indépendantes) :

1. Soient G_1 et G_2 deux groupes, H_1 un sous-groupe normal de G_1 et H_2 un sous-groupe normal de G_2.
   (a) Montrer que $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe normal de $G_1 \times G_2$.
   (b) Montrer que $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ est isomorphe à $G_1/H_1 \times G_2/H_2$.
2. Le polynôme $P = 5X^8 - 35X^6 + 14X^4 + 98X - 42$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$? Justifier.

Exercice 3 : Soient H et N des groupes et soient φ et $\psi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ deux morphismes de groupes. On veut trouver des conditions suffisantes pour que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

1. On suppose qu'il existe un automorphisme f de H tel que $\psi = \varphi \circ f$. Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.
2. On suppose qu'il existe un automorphisme g de N tel que
$$\forall h \in H,\ \varphi(h) = g \circ \psi(h) \circ g^{-1}$$
   Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.
3. On suppose que H est cyclique et que $\varphi(H) = \psi(H)$. Montrer que $N \rtimes_\varphi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 4 :

1. Soit N un groupe d'ordre 15.
   (a) Démontrer que N admet un unique sous-groupe N_3 d'ordre 3 et que celui-ci est normal dans N.
   (b) Démontrer de même que N possède un unique sous-groupe normal N_5 d'ordre 5.
   (c) Montrer que $N_3 \cdot N_5$ est un sous-groupe de N isomorphe au groupe produit $N_3 \times N_5$.
   (d) En déduire que tout groupe d'ordre 15 est cyclique et est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
2. Soit M un groupe d'ordre 85. En adaptant toutes les questions du cas précédent, montrer que M est cyclique et est isomorphe à $\mathbb{Z}/85\mathbb{Z}$.
3. Dans la suite on considère G un groupe d'ordre 255. On veut montrer que le groupe G est cyclique.
   (a) Montrer que le groupe G admet un unique sous-groupe K d'ordre 17, que ce sous-groupe est normal dans G et que K est isomorphe à $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que le groupe quotient G/K est cyclique et qu'il possède un unique sous-groupe Q d'ordre 5.
   (c) Soit $\pi : G \longrightarrow G/K$ la projection canonique. Prouver que l'image réciproque $H = \pi^{-1}(Q)$ est un sous groupe normal de G
   (d) Montrer que le sous-groupe H est d'ordre 85 et qu'il est cyclique.
   (e) Montrer que H admet un unique sous-groupe normal L d'ordre 5 et que L est également normal dans G.
   (f) Montrer enfin que G est cyclique.

Exercice 5 : Soit $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\mathrm{j}] = \{a + b\mathrm{j} \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ où $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ une racine 3e de l'unité. On rappelle que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que l'expression $N(a + \mathrm{j}b) = |a + \mathrm{j}b|^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$ définit une application de $\mathbb{Z}[\mathrm{j}] \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{N}^*$.
3. Soit $z = t_1 + \mathrm{j}t_2$ avec t_1, t_2 dans $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $q_1 + \mathrm{j}q_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{j}]$ tel que $|z - (q_1 + \mathrm{j}q_2)|^2 < 1$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}[\mathrm{j}]$ est euclidien pour le stathme N.
5. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.