L3 maths

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2020-2021
Juin 2021

Algèbre 1
Examen

Question de cours 1. Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G.

(1) Donner la définition de la relation “être congru modulo H”.

(2) Montrer que la relation “être congru modulo H” est une relation d'équivalence.

(3) Montrer que, si $a \equiv b \pmod{H}$ et $c \equiv d \pmod{H}$, alors $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{H}$.

(4) Rappelons que G/H désigne le quotient de G par la relation “être congru modulo H”. Donner la définition de l'opération $+$ sur G/H.

(5) Montrer que $(G/H, +)$ est un groupe abélien.

Question de cours 2. Soit A un anneau principal.

(1) Soit

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_i \subset I_{i+1} \subset \cdots$$

une suite croissante d'idéaux dans A. Montrer qu'il existe un entier N tel que $I_i = I_N$ pour tout $i \geq N$.

(2) Donner la définition d'élément irréductible dans A.

(3) Montrer que tout élément non nul et non inversible de A est produit d'éléments irréductibles.

Exercice 1. Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 36 à isomorphisme près. Chaque groupe sera donné sous forme de produit direct de ses facteurs invariants.

Exercice 2.

(1) Soit c un cycle de longueur m dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Montrer que c est d'ordre m.

(2) Soient $c_1, \ldots, c_\ell$ ℓ des cycles dans $\mathfrak{S}_n$ à supports disjoints. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ on note m_i la longueur de c_i, et on pose $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_\ell$. Montrer que l'ordre de σ est $\operatorname{ppcm}(m_1, \ldots, m_\ell)$.

(3) Soit p un nombre premier. Montrer que les seuls éléments de $\mathfrak{S}_p$ d'ordre p sont les cycles de longueur p.

Exercice 3. Soit $A = \{\frac{a}{5^k} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$.

(1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et justifier que A est intègre.

(2) Montrer que le corps des fractions de A est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

(3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}(A)$ des éléments inversibles de A.

(4) Soit I un idéal de A différent de A et de $\{0\}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, m premier à 5, tel que $I = (m)$. (<u>Indication :</u> Posons $I_0 = I \cap \mathbb{Z}$. Montrer que I_0 est un idéal de $\mathbb{Z}$ différent de $\{0\}$ et de $\mathbb{Z}$, et est engendré par un nombre $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, non divisible par 5). Que peut-on en conclure sur A ?