L2 - Phys 3B

Exercice de mécanique classique I sur 8 points :
On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m, attachée à l'une des extrémités d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L. Ce pendule est placé dans le champ de pesanteur dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. L'autre extrémité du fil est attachée en un point fixe A. Ecarté de sa position d'équilibre O, le pendule oscille sans frottements avec une amplitude θ. Le point M_0 d'angle θ_0 est la position initiale à partir de laquelle le pendule est abandonné sans vitesse. Une position quelconque M est repérée par θ, l'élongation angulaire mesurée à partir de la position d'équilibre O. Le point O correspond à l'angle $\theta = 0$.

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c en M en fonction de $\dot{\theta}$, la dérivée temporelle de l'angle θ.
2. On prendra l'origine des énergies potentielles en O, origine de l'axe vertical des z qui est orienté vers le haut. Montrer que l'énergie potentielle en M peut se mettre sous la forme :
$$E_p = mgL(1 - \cos\theta).$$
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique en fonction de m, g, L, $\dot{\theta}$ et θ. Pourquoi l'énergie mécanique se conserve-t-elle ?
4. Retrouver la seconde loi de Newton à partir de l'expression de l'énergie mécanique.
5. Exprimer la vitesse de la masse m au passage par la position d'équilibre en fonction de g, L et θ_0. Calculer sa valeur en utilisant $g = 10$ ms^{-2}, $L = 1$ m et $\cos\theta_0 = 0.95$.
6. Enoncer la loi d'isochronisme des petites oscillations de période T_0.
7. Choisir l'expression correcte de la période parmi les suivantes en justifiant par une analyse dimensionnelle :
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}};\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\beta_m}{L}};\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{L}}.$$
8. Déterminer les positions d'équilibre du pendule simple. On supposera que $\theta \in [-\pi, \pi]$.
9. Déterminer la stabilité de ces différents points.
10. Construire le portrait de phase du pendule simple dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$.
11. Donner une classification des difféntes trajectoires que l'on peut rencontrer. Quelles sont les trajectoires de ce portrait qui sont approximativement de période T_0 ?
12. Donner l'expression du Lagrangien $\mathcal{L}$ de ce système.
13. Montrer en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange que l'on peut retrouver la seconde loi de Newton.

Exercice de relativité II sur 7 points :
Après avoir synchronisé leurs horloges, une fusée avec à son bord un observateur (A') référentiel (R.') - quitte un observateur terrestre (A) référentiel

(R.) - avec la vitesse v. Au bout d'un temps t_1, mesuré dans le référentiel de (A), une seconde fusée avec à son bord un observateur (A") référentiel (R.") - quitte à son tour la Terre avec une vitesse u. On considère que v et u ont même direction et même sens et que, en module, $u > v$. Dans le référentiel terrestre (R.) l'observateur (A") rattrape (A') à l'instant t_2.

1. Calculer t_2 en fonction de t_1, u et v.
2. Pour les horloges au repos dans (R.') à quel instant (A") a-t-il quitté la Terre ?
3. Pour les horloges au repos dans (R.') à quel instant (A") a-t-il rattrapé (A') ?
4. Déterminer dans le référentiel (R.') la distance séparant (A') de (A) à l'instant du départ de (A").
5. En déduire l'expression de la vitesse u' de (A") quand elle est mesurée par (A'). On montrera que :

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

6. Que devient cette formule lorsque u et v sont petits devant c. Ce résultat était-il attendu.

Exercice de relativité II sur 5 points :
Des pions π^+ de haute énergie sont produits lors de la collision entre des protons et des neutrons. Ils se désintègrent dans leur référentiel propre en accord avec la loi :

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau_0}$$

dans laquelle τ_0 est la durée de vie moyenne valant 5×10^{-8} s pour les pions. Un faisceau de pions est produite dans un accélérateur et on constate qu'il en reste 37% à une distance d de 30 m de la source. On donne $\exp(-1) \simeq 0.37$ et $\exp(-2) \simeq 0.14$.

1. Les pions ayant une vitesse v très proche de celle de la lumière, en combien de temps franchissent-ils les 30 mètres ?
2. Dans le cadre de la mécanique galiléenne combien devrait-il en rester après avoir franchi cette distance ?
3. Déduire du calcul précédent le facteur γ.
4. En déduire la vitesse des pions.