

## Contrôle terminal – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet,  $G$  est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté  $e$ .

**Exercice 1.**Soit  $f: G \rightarrow G$  un morphisme de groupes.1) Soit  $a \in G$ . En partant des définitions rappelées en page 2, montrer les assertions suivantes.a)  $f(e) = e$ . b)  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ . c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a^n) = f(a)^n$ .d) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(a^n) = f(a)^n$ .2) On rappelle que le noyau de  $f$  est  $\ker(f) := \{x \in G \mid f(x) = e\}$ .a) Montrer que  $\ker(f)$  est un sous-groupe de  $G$ .b) Donner une propriété nécessaire et suffisante sur  $\ker(f)$  pour que  $f$  soit injective. Et montrer cette équivalence.3) Soit  $a \in G$  un élément d'ordre fini dont on note  $k$  l'ordre.a) Montrer que  $f(a)$  est d'ordre fini.b) Soit  $r$  l'ordre de  $f(a)$ . Pour chacune des deux assertions suivantes, déterminer si elle est toujours vraie. Si c'est le cas, donnez-en une preuve et sinon, donnez-en un contre-exemple.

$$\text{i) } r \leq k \quad \text{ii) } k \leq r.$$

**Exercice 2.**Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Pour tout  $a$  dans  $G$  on pose  $aH := \{ab \mid b \in H\}$ . Soit  $x, y \in G$ . Montrer que si  $xH \cap yH \neq \emptyset$  alors  $xH = yH$ .**Exercice 3.**Rappelons que si  $n \in \mathbb{Z}$  alors  $n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Déterminer  $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$  en justifiant bien la réponse. Ici le produit dans  $\mathbb{Z}$  est le produit standard entre entiers.**Exercice 4.**a) Soit  $a \in G$ . On définit l'ensemble  $C_a$  par  $C_a := \{x \in G \mid ax = xa\}$ . Montrer que  $C_a$  est un sous-groupe de  $G$ .b) L'ensemble  $Z := \{x \in G \mid \forall y \in G \quad yx = xy\}$  est-il un sous-groupe de  $G$ ?**Exercice 5.**Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $a$  un élément d'ordre  $k$  de  $G$ . Montrer que

$$H := \{a^n \mid n \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket\}$$

est un sous-groupe de  $G$ .

---

## Rappels de cours

---

### Définition.

On appelle *groupe* un ensemble  $G$  muni d'une loi  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \mapsto a * b$  telle que

- i) la loi  $*$  est *associative* c-à-d pour tout  $a, b, c$  dans  $G$ ,  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ,
- ii) il existe un *élément neutre*  $e$  c-à-d pour tout  $a$  dans  $G$ ,  $a * e = e * a = a$ ,
- iii) tout élément de  $G$  possède un *inverse* c-à-d pour tout  $a$  dans  $G$ , il existe  $b$  dans  $G$  tel que  $a * b = b * a = e$ .

On parle alors du groupe  $(G, *)$  ou simplement  $G$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi.

Dans cet examen, on écrira  $ab$  à la place de  $a * b$  et l'inverse de  $a$  sera noté  $a^{-1}$ .

### Définition.

Soit  $a \in G$ . Si  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit l'élément  $a^n$  de  $G$  en suivant les règles suivantes :

- $a^0 = e$ ,
- si  $n \geq 0$  alors  $a^{n+1} = a(a^n)$ ,
- si  $n < 0$  alors  $a^n = (a^{|n|})^{-1}$ .

### Définition.

Une application  $f: G \rightarrow G$  est un *morphisme de groupes* si pour tout  $x, y \in G$ ,  $f(xy) = f(x)f(y)$ .