L2

Math3C -Probabilités
Université de Bourgogne-Franche-Comté

17 décembre, 2019

Exercice 1 Dans une tribu, il y a 45% de mâles et 55% de femelles. Ils résistent plus ou moins à une épidémie qui dévaste sur la tribu. On observe que parmi les mâles, 55% des individus sont contaminés; par ailleurs, 60% des individus non contaminés sont des femelles.

Pour fixer les idées, on note M l'événement que l'individu est un mâle, F l'événement que l'individu est une femelle. On note I l'événement que l'individu est infecté, $\bar{I}$ l'événement que l'individu est non infecté. Alors d'après les données :

$$\mathbb{P}(M) = 0,45, \quad \mathbb{P}(I|M) = 0,55, \quad \mathbb{P}(F|\bar{I}) = 0,60.$$

(a) Calculer $\mathbb{P}(M \cap \bar{I})$.

(b) Que vaut $\mathbb{P}(M|\bar{I})$? Utilisant la formule de Bayes, calculer $\mathbb{P}(\bar{I})$; en déduire $\mathbb{P}(I)$.

(c) Calculer $\mathbb{P}(M|I)$, puis $\mathbb{P}(F|I)$.

(d) Calculer $\mathbb{P}(I|F)$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

(a) Donner $\mathbb{E}(X)$.
(b) Calculer la fonction génératrice $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$; en déduire la variance σ_X^2 de X.
(c) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X, de loi $\mathcal{B}(m,p)$, $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $X+Y$.
(d) Calculer $\mathbb{E}(2^X)$.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0;1)$; c'est-à-dire que X admet la densité : $p(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. On note Φ la fonction de répartition de X :

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(\{X \leq t\}) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx.$$

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
(b) Déterminer l'intervalle $[-a, a]$ tel que $\mathbb{P}(\{X \in [-a,a]\}) = 0,95$, sachant que $\Phi(1,96) = 0,975$.

On dit qu'une variable aléatoire Y suit la loi normale $N(m;\sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si

$$X := \frac{Y-m}{\sigma}$$

suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

(c) On note $z_{0,025} = 1,96$. Trouver l'intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $\mathbb{P}(\{Y \in [\alpha, \beta]\}) = 0,95$: exprimer $\alpha; \beta$ en fonction de $m, \sigma, z_{0,025}$.
(d) La taille en cm des étudiants de l'Université de Bourgogne suit la loi normale $N(170;4)$. Déterminer l'intervalle dans le quel, 95% d'étudiants y trouvent.