L2

Université de Bourgogne — Année universitaire 2019-2020

Licence de Mathématiques Math3B

Examen

Décembre 2019. Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin

Exercice 1. (Questions de cours) *(5 points)* Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont les polynômes caractéristique et minimal sont

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda_i - X)^{p_i} \text{ et } \mu_f(X) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda_i - X)^{q_i},$$

où pour tout $i, j = 1, \cdots, m$, avec $i \neq j$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$.

i) Donner la définition du sous-espace propre E_{λ_i} et du sous-espace caractéristique N_{λ_i} associés à la valeur propre λ_i.

ii) Montrer que $N_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i)^{q_i}$. On admet que $dim(N_{\lambda_i}) = p_i$.

iii) Soit f_i la restriction de f à N_{λ_i}. Montrer que f_i est un endomorphisme de N_{λ_i}. Montrer que les polynômes minimal et caractéristique de f_i sont

$$\mu_{f_i}(X) = (X - \lambda_i)^{q_i}, \quad P_{f_i}(X) = (\lambda_i - X)^{p_i}.$$

En déduire que si f est diagonalisable, alors f_i l'est aussi.

Exercice 2. (Maîtrise des concepts) *(5 points)*

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. La somme et le produit de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.
4. Toute matrice nilpotente est diagonalisable.
5. Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $f^3 = id_E$ est toujours diagonalisable.

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les projecteurs spectraux.
3. Trouver la décomposition de Dunford de A.

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

TOURNER S.V.P.

2. Montrer que le sous-espace propre E_λ de A est égal au sous-espace vectoriel engendré par w_1, où $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$.
3. Déterminer des vecteurs non nuls $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$, vérifiant $(A-\lambda I)w_2 = w_1$ et $(A-\lambda I)w_3 = w_2$, tels que la famille $\beta := (w_1, w_2, w_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Démontrer que la matrice de f dans la base β est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base β.

5. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
6. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $exp(tB)$.
7. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.