L2

Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et notons $I = [a, b]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

1. Définir « f intégrable sur I » puis montrer que « f intégrable » implique « f bornée ».
2. Soit f bornée sur I. Donner les définitions des intégrales inférieure et supérieure de f puis montrer qu'elles sont bien posées.
3. Soit f bornée sur I. Montrer que les intégrales inférieure et supérieure de f coïncident si et seulement si f est intégrable sur I.
4. Dire, en justifiant la réponse, si les fonctions suivantes sont intégrables sur I et dans ce cas en calculer l'intégrale :
   (a) $f(x) = x^2$ si $x \in I \cap \mathbb{Z}$, $f(x) = -x^2$ si $x \in I \setminus \mathbb{Z}$.
   (b) $f(x) = x$ si $x \in I \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = -x$ si $x \in I \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soit $b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et (a_n) une suite de nombres complexes avec $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$, b) $\sum_n a_n z^{3n}$, c) $\sum_n (c^n a_n^2) z^n$.

Exercice 3. Soit $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.
2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3 + n^2 k}{n^4 + n^2 k^2 + k^4}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 13x^2 + 36}.$$

1. Déterminer le développement $\sum a_n x^n$ en série entière de f autour de 0.
2. Quel est le rayon R de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Déterminer la nature de $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = R$.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, (a_n) une suite réelle et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définie dans un voisinage ouvert U de 0 et satisfaisant pour tout $x \in U$:

$$(1 - x^2) f''(x) - 2x f'(x) + \alpha f(x) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

1. Trouver une relation de récurrence sur (a_n).
2. Supposons $\alpha = (m^2 - 1)/4$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
3. Soit $\alpha = 0$. Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrer que, si $|x| < 1$, alors :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right).$$