Examen - Compléments mathématiques. Durée 2h.

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y' + 2xy = (2x+1)\,\mathrm{e}^x.$$
2. Déterminer la solution satisfaisant la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 2. Dans le carré $C = [0;1]^2$, on considère les sous-ensembles définis pour $t \in [0;1]$ par
$$F_t = [t;1] \times [0;t], \qquad G_t =]t;1] \times [0;t[$$
ainsi que les sous-ensembles
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}, \quad L' = C \setminus U \quad \text{et} \quad U' = C \setminus L.$$

1. Compléter les expressions suivantes :
$$L' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \cdots \quad \} \qquad U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \cdots \quad \}.$$
2. Vérifier que $\{L', U', L \cap U\}$ est une partition de $[0;1] \times [0;1]$.
3. Vérifier que
$$\text{(a) } L = \bigcup_{t \in [0;1]} F_t\,; \qquad \text{(b) } U = \bigcap_{t \in [0;1]} (C \setminus G_t).$$

Exercice 3. Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Rappeler la définition de $f(A)$ pour $A \subset X$.
2. Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ pour $B \subset Y$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. Montrer que si f est injective alors pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on a $f^{-1}(f(A)) = A$.
5. Montrer la réciproque de la question 4 (indication : considérer le singleton $A = \{x\}$ pour $x \in X$).

Exercice 4. Pour tout couple d'entiers (q,m) tels que $0 \leqslant q \leqslant m$, on note $\mathscr{P}_q(m)$ l'ensemble des parties de $\{1,2,\ldots,m\}$ contenant q éléments.
On fixe des entiers p et n tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ et on considère l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_p(n) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \max(A) \end{array}$$

1. Dans cette question uniquement, on prend $p = 2$ et $n = 4$.
   (a) Préciser pour chaque élément de $\mathscr{P}_2(4)$ son image par f ;
   (b) En déduire $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{4\})$.
2. Déterminer $f(\mathscr{P}_p(n))$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{k\})$ pour un entier k tel que $p \leqslant k \leqslant n$, justifier qu'il est en bijection avec $\mathscr{P}_{p-1}(k-1)$ et donner son cardinal.
4. Justifier que les sous-ensembles $f^{-1}(\{k\})$ pour $p \leqslant k \leqslant n$ forment une partition de $\mathscr{P}_p(n)$.
5. En déduire la formule
$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}.$$