Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B

Année 2018-2019
13 mai 2019

Examen

Durée : 2 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) **(4 points)**

(a) Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs du nombre réel $a$ le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +x_4 & = 1 \\ & ax_2 & +ax_3 & +x_4 & = 1 \\ 2x_1 & +ax_2 & & & = -1 \\ x_1 & & -x_3 & -x_4 & = -1 \end{cases}$$

a zéro, une, ou une infinité de solutions.

(b) Résoudre le système pour $a = 1$.

(2) **(5 points)** Déterminer parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires. Pour les applications linéaires, déterminer une base de l'image et une base du noyau. Justifier vos réponses

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ où $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ y+z \end{pmatrix}$ ;

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ où $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \\ y+z \end{pmatrix}$ ;

(c) $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ où $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq 4$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et
$f(P) = 2P - XP'$. (Ici, $P'$ est la dérivée de $P$ par rapport à $X$.)

(3) **(3 points)** Déterminer les inverses des matrices suivantes lorsqu'elles existent.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) **(5 points)** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x, x + 2y - z, 2x + 2y - z)$.

(a) Soit $\mathcal{C}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice $A = Mat(f; \mathcal{C}_3)$, la matrice de l'application $f$ par rapport à la base $\mathcal{C}_3$.

(b) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de $A$ (ou de $f$).

(c) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs propres de $A$.

(d) Déterminer une matrice $P$ inversible telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale, et préciser $D$.

(5) **(3 points )** Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-y+z \\ y+z \\ x-z \\ x+y+z \end{pmatrix}$

(i) Déterminer la matrice $B = Mat(h; \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$, où $\mathcal{C}_i$ est la base canonique de $\mathbb{R}^i$, $i = 3, 4$.

(ii) Trouver une base de l'image de $h$.

(iii) Existe-t-il une application linéaire $g_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que $g_1 \circ h$ est l'application identité sur $\mathbb{R}^3$ ? Existe-t'il une application linéaire $g_2$ de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que $h \circ g_2$ est l'application identité sur $\mathbb{R}^4$ ? Justifier vos réponses.