Université de Bourgogne
L2 MaPC3A **2019/20**

Examen

19 décembre 2019 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Donner la définition d'une fonction f differentiable au point $x \in D$.

b) Donner la définition de la dérivée directionnelle $D_h f$ en direction $h \in \mathbb{R}^n$ au point $x \in D$.

c) Montrer que si f est différentiable au point $x \in D$ elle admet des dérivées directionnelles $D_h f$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Ex 2. Calculer la matrice de Jacobi, la divergence et le rotationnel du champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivant

$$F(x) = (x \wedge a)\langle x, a\rangle,$$

où $a \in \mathbb{R}^3$.

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = 4x^2y^2 - 8x^2y + 3x^2 - y^3 + 3y,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle.

Ex 4. Soit D la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x - 1; \quad y = x - x^2,$$

a) Trouver l'aire de D.

b) Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.

Ex 5. Soit D est un demi-anneau défini par

$$D = \{(x, y) : \quad y > 0, \quad R^2 < x^2 + y^2 < 4R^2\}.$$

a) Trouver l'aire de D.

b) Calculer

$$\iint\limits_D x^2 dxdy.$$

1/1