Université de Bourgogne Année 2018-2019
MathPC2A

Examen d'algèbre linéaire

Exercice 1.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. En calculant son déterminant, déterminer, en fonction de a et b si la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

est inversible. Calculer son inverse lorsque $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 2.
Pour la matrice suivante, déterminer les valeurs propres puis une base de chaque espace propre associé.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 6 \\ 4 & 9 & -6 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.
Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - 2t = 0, x + t = 0\},$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - z + t = 0, y + z = 0\}.$$

1) Trouver une base de F et G.
2) Les s.e.v F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4.
On considère l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ -y + 2z \\ -y + 2z \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer les équations et une base de son image.
3) Même question pour son noyau.
4) Montrer que le noyau et l'image sont en somme directe.
5) Représenter graphiquement le noyau et l'image de f et interpréter géométriquement l'application f.
6) On considère la matrice $B = 2A - I_3$ et g l'application linéaire associée. Calculer le rang de g.
7) Calculer B^2 et en déduire B^{-1}.
8) Soit $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
9) Donner P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique, ainsi que son inverse.
10) Calculer C la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ et expliciter la relation entre B, C, P et P^{-1}.
11) Calculer de deux manières différentes la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
12) Interpréter géométriquement g.