UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Sciences & Techniques

Licence deuxième année.
Mathématiques MaIE3A
Examen du 19/12/2019 Durée : 2 heures.

Documents, ordinateurs, calculettes et téléphones portables interdits pendant l'épreuve.

Exercice 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$.
   1-a) Calculer $P(2)$. Déterminer les nombres a, b, c tels que $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.
   1-b) Calculer les racines complexes z_1 et z_2 de P.
   1-c) Représenter, dans $\mathcal{P}$, les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2. Que peut-on dire du triangle OM_1M_2?
2) 2-a) Vérifier que : $(1-i)z - 2 + 2i = (1-i)(z-2)$
   2-b) Déterminer géométriquement et tracer l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z tels que : $|(1-i)z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$. *(utiliser la question précédente)*

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) &= 1 - t^2 \\ y(t) &= 2 - t^2 + t^3 \end{cases}$$

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
2) Déterminer le point stationnaire. Dessiner l'allure de la courbe en ce point. On précisera le sens de déplacement.
3) Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On fera un tableau des variations.
4) Etudier les branches infinies en $\pm\infty$.
5) Dessiner la courbe.

Exercice 3

1) Soit $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$. Calculer b_1, b_2.
2) 2-a) Vérifier que : $\frac{x^3}{x^2+4x-5} = x - 4 + \frac{21x-20}{x^2+4x-5}$
   2-b) Déterminer a, b tels que : $\frac{21x-20}{x^2+4x-5} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+5}$.
   2-c) Calculer : $\int \frac{x^3}{x^2+4x-5}dx$

Exercice 4

On étudie le refroidissement d'un objet. La différence de température $\theta(t)$ de l'objet et celle du milieu ambiant vérifie alors : $\frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0$. ($t$ est le temps exprimé en minutes, $\theta(t)$ en degrés Celsius et $k > 0$ une constante dépendant de l'objet)

1) Déterminer $\theta(t)$ sachant qu'au temps $t = 0$, on a : $\theta(0) = 90°$C.
2) Sachant que pour l'objet étudié $k = \ln 3$, calculer $\theta(1)$. La température du milieu ambiant étant de 15°C, déterminer la température de l'objet après 1 minute.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $(E) : y" - 3y' + 2y = \sin x$.

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).
2) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$ où A et B sont des constantes réelles à chercher.
3) En déduire les solutions de (E).
