Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, année 2018-2019.
L1, Mathématiques pour l'Informatique et l'Électronique II - MaIE2A.

Examen du 16 mai 2019, 9h-11h, session 1.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$ en donnant toutes les étapes des calculs :

a. $(\pi^{-n})_{n\geqslant 0}$

b. $(-\pi^{n})_{n\geqslant 0}$

c. $\left(\frac{n^4+3n^2+11n}{9n^5+n^3}\right)_{n\geqslant 1}$

d. $\left(\frac{n+\cos(n)}{n(1-\cos(\frac{1}{n}))+\sqrt{4n^2+1}}\right)_{n\geqslant 1}$

e. $\left(\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}-\sqrt{n^2-\frac{1}{2}}\right)_{n\geqslant 1}$

2. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$s_{n+2} = 3s_{n+1} - 2s_n,$$

et les conditions initiales $s_0 = 2$, $s_1 = 3$. Donner le terme général de la suite.

3. **a.** Calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-2n+2}.$$

b. Montrer que la série suivante est divergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}.$$

4. Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier, en calculant AA^{-1}.

5. Trouver l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^4$ des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Écrire des générateurs pour S.

6. Trouver une base pour le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ x_2. \end{pmatrix}$$

a. Trouver la matrice associée.

b. Trouver le rang de la matrice associée.

c. Écrire la matrice associée à $f \circ f$.