

Info3B, 2019-2020, partie Synthèse d'Images

Jeudi 19 décembre 2019

Dans tout le sujet, nous nous plaçons dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine 3D usuel.

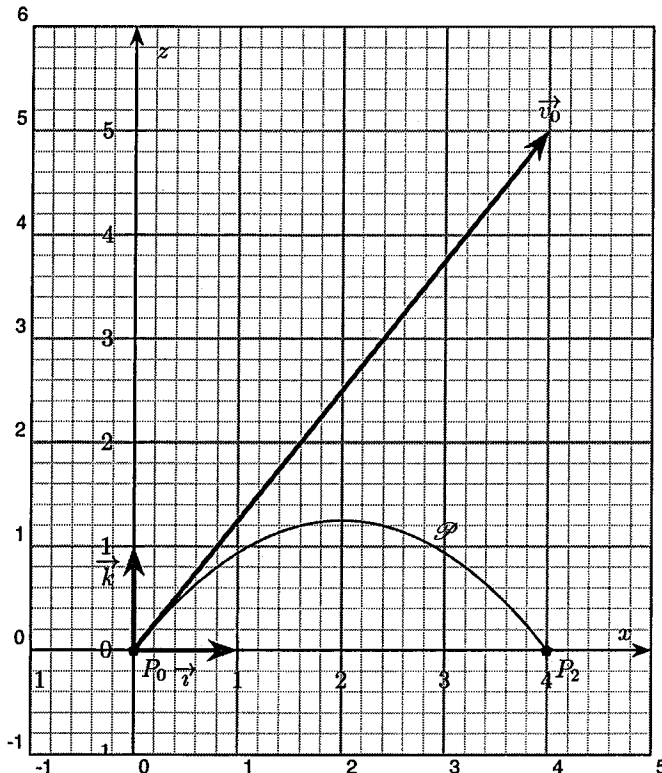
Exercice 1 : Lancer de projectile

FIGURE 1: Trajectoire d'une fusée du 14 juillet : arc de parabole \mathcal{P} représenté par une courbe de Bézier.

Une fusée est lancée depuis le point $P_0(0; 0; 0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0(4; 0; 5)$ et retombe en $P_2(4; 0; 0)$. La trajectoire est un arc de parabole γ .

Sans utiliser la relation fondamentale de la dynamique, déterminer le point P_1 pour représenter cet arc par une courbe de Bézier de degré 2 de point de contrôle P_0, P_1 et P_2 .

Exercice 2 : Construction d'une surface de révolution, figure 3.

La figure 4 illustre les contraintes, dans le plan d'équation $y = 0$, permettant de construire la surface de révolution, figure 2. Ce dernier est composé de quatre parties :

1. d'une partie rigole supérieure en vert;
2. un cône de révolution ouvert en bleu;
3. une surface de révolution basée sur une courbe de Bézier, figure 3;
4. d'une partie rigole inférieure en rouge.

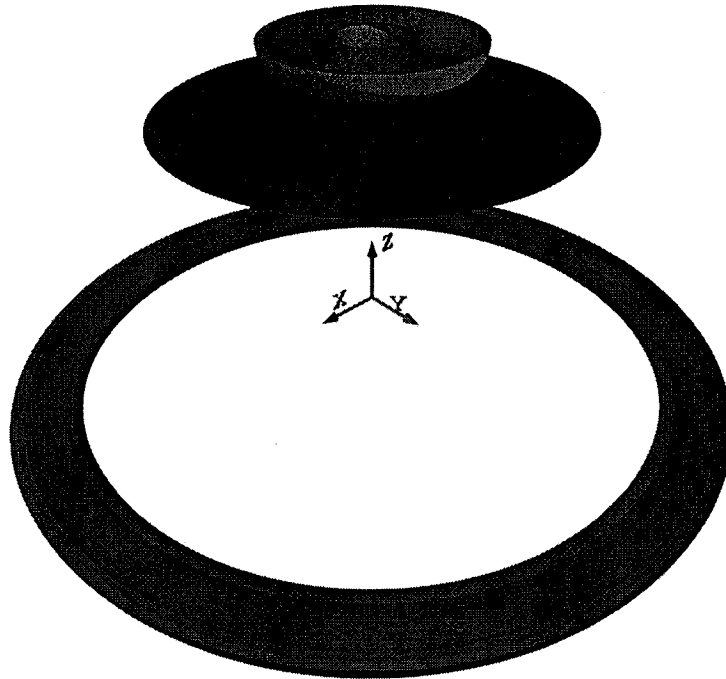


FIGURE 2: Une partie de la surface de révolution à construire.

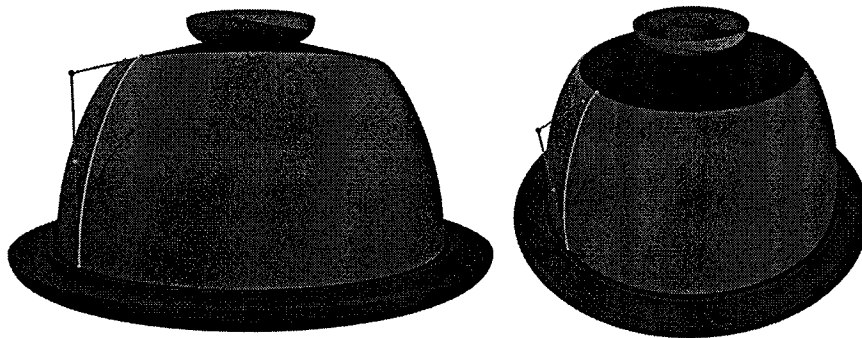


FIGURE 3: Surface de révolution à construire.

1. Le code de la caméra est le suivant :

```
camera {
    location <7,7.5,7>
    look_at <0,0,0>
    sky <0,0,1>
    right <-image_width/image_height,0,0>
}
```

Par défaut, quel axe du repère est l'axe d'un tore ?

2. On considère le plan \mathcal{P} d'équation :

$$ax + by + cz = d \tag{1}$$

avec :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

(a) Donner la contrainte devant vérifier d ;

(b) Donner les composantes du vecteur normal unitaire au plan \mathcal{P} induit par l'équation 1.

3. Construction de la rigole supérieure, description 1.

La rigole est composée de la différence de deux tores \mathcal{T}_0 et $\mathcal{T}_{0,\varepsilon}$ de centre $O_0(0;0;z_0)$, de rayon majeur R_0 et de rayons mineurs respectifs r_0 et $r_{0,\varepsilon} = r_0 - 0,1$. Cette différence est tronquée en utilisant le plan \mathcal{P}_0 passant par O_0 et orthogonal à l'axe des cotes.

- (a) Déterminer R_0 .
- (b) Déterminer r_0 .
- (c) Déterminer z_0 .
- (d) Donner l'équation du plan \mathcal{P}_0 .
- (e) Construire, en l'expliquant, l'arbre C.S.G. permettant d'obtenir cette rigole.
- (f) Donner le code POV-Ray permettant de construire cette rigole.

4. L'intersection du cône de révolution ouvert avec le plan d'équation $y = 0$ est deux segments d'extrémités $A(R_0;0;z_0 - r_0)$ et $P_0(3;0;3)$ d'une part et $\mathcal{R}_{(O,\vec{k})}(A)$ et $\mathcal{R}_{(O,\vec{k})}(P_0)$ où $\mathcal{R}_{(O,\vec{k})}$ est le retournement¹ d'axe (O,\vec{k}) , description 2.

- (a) Donner les coordonnées de $\mathcal{R}_{(O,\vec{k})}(A)$ et $\mathcal{R}_{(O,\vec{k})}(P_0)$;
- (b) Donner les coordonnées des centres et les rayons correspondants des cercles permettant de définir le cône de révolution;
- (c) Donner le code POV-Ray permettant de tracer ce cône.

5. Construction de la rigole inférieure, description 4.

La rigole est composée de la différence de deux tores \mathcal{T}_1 et $\mathcal{T}_{1,\varepsilon}$ de centre $O_1(0;0;z_1)$, de rayons majeur R_1 et de rayons mineurs respectifs r_1 et $r_{1,\varepsilon} = r_1 - 0,2$. Cette différence est tronquée en utilisant le plan \mathcal{P}_1 passant par O_1 et orthogonal à l'axe des cotes.

- (a) Déterminer R_1 .
- (b) Déterminer r_1 .
- (c) Déterminer z_1 .
- (d) Donner l'équation du plan \mathcal{P}_1 .
- (e) Construire, en l'expliquant, l'arbre C.S.G. permettant d'obtenir cette rigole.
- (f) Donner le code POV-Ray permettant de construire cette rigole.

6. Une surface de révolution entre la rigole inférieure et le cône de révolution.

La surface de révolution est construite à l'aide d'une courbe de Bézier cubique γ de points de contrôle $P_0(3;0;3)$, P_1 , P_2 et $P_3(R_1 - r_1;0;z_1)$, description 3.

- (a) Dans le plan d'équation $y = 0$, déterminer le point P_4 comme intersection des tangentes au cône de révolution en P_0 et au tore \mathcal{T}_1 en P_3 :
 - i. par une méthode graphique (cf. figure 4 de l'annexe A à rendre avec la copie);
 - ii. par un calcul vectoriel avec deux équations et une seule inconnue. La première équation traduit la colinéarité en toute dimension tandis que la seconde condition traduit la colinéarité seulement dans \mathbb{R}^3 .
- (b) Déterminer une position du point P_1 comme combinaison convexe de P_0 et P_4 .
- (c) Déterminer une position du point P_2 comme combinaison convexe de P_3 et P_4 .
- (d) Donner la syntaxe POV-Ray permettant de tracer la surface de révolution basée sur la courbe γ (sans oublier les transformations idoines éventuelles).
- (e) Donner le code POV-Ray de la macro permettant de tracer la courbe de Bézier cubique de points de contrôle P_0 , P_1 , P_2 et P_3 .

1. Rotation d'angle π .

A Annexe Synthèse d'Images à rendre avec la copie

Numéro d'anonymat :

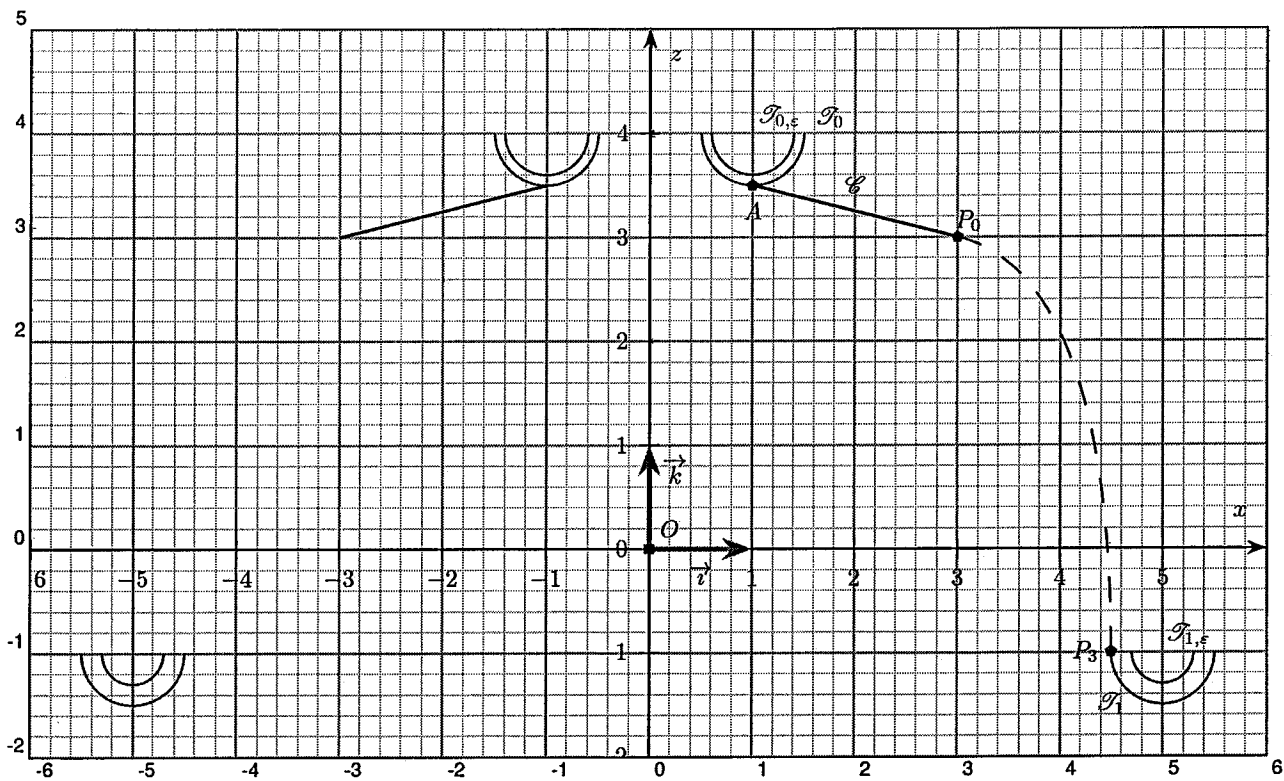


FIGURE 4: Contraintes, dans le plan de symétrie d'équation $y = 0$, permettant de construire la surface de révolution entre le tore \mathcal{T}_1 et le cône de révolution \mathcal{C} .