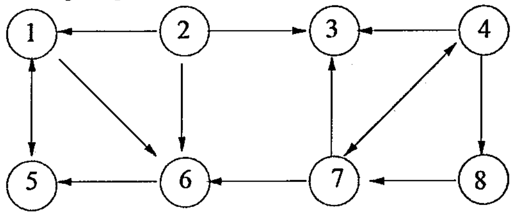
Info 3A -

EXAMEN[1] LICENCE 2, MODULE I3A, 17/12/2019

PGCD(a, b). 1. Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 49$ et $b = 35$, et les deux nombres de Bezout u et v tels que $au + bv = g$. Utilisez un tableau avec des colonnes a, b, r, q, g, u, v (dans la division entière de a par b, q est le quotient et r le reste). Dans la dernière ligne, u vaut 1, v vaut 0, q et r sont indéfinis.
2. Idem, mais dans la dernière ligne, u vaut 1 et v vaut k.
3. Calculez matriciellement le PGCD de a et b, en au plus 8 lignes.

Composantes fortement connexes. Dessinez le graphe réduit du graphe ci-dessous, de telle façon que tous ses arcs aillent de haut en bas (0 ligne).



Dijkstra. Un étudiant a programmé l'algorithme de Dijkstra. Soient Ω le sommet source, S le nombre de sommets, A le nombre d'arcs, $L_{a,b}$ la longueur (jamais négative) de l'arc $a \to b$ (s'il n'y a pas d'arc $a \to b$, vous pouvez supposer que $L_{a,b} = \infty$), pour les données de l'algorithme. Quant à ses résultats, soit D_s la longueur du plus court chemin de Ω à s. Comment vérifier en $O(S+A)$ temps que les D_s calculés sont corrects ? Autrement dit, quelles assertions doivent-ils satisfaire ? Eventuellement, vous pouvez utiliser P_s, le sommet précédant immédiatement s dans le plus court chemin de Ω à s. Répondre en une seule ligne.

Permutation. Une permutation p de n éléments $0, 1, \ldots n-1$ est décrite par un tableau de n entiers P, tel que $p(i)$ est $P[i]$ (notations de Java). Soit q la permutation inverse de p : $p(i) = j \Leftrightarrow q(j) = i$. Un tableau Q de n entiers a été alloué pour représenter q. Par quelle instruction faut-il remplacer les ... dans : `for i=0 to n-1 do ... done` pour construire Q en $O(n)$? (1 ligne)

Puissance rapide. 1. Décrivez en au plus 2 lignes la méthode calculant rapidement M^k, où M est une matrice carrée et k un entier plus grand que 1.
2. L'algorithme précédent effectue $T(n)$ produits matriciels pour calculer M^n. Donnez en une ligne la relation récursive définissant T (ce n'est pas : $T(n) = 2T(n/2) + n$).
3. En 1 ligne, donnez la complexité de T (ce n'est pas $T(n) = O(n^2 \log_2 n)$).
4. En 1 ligne, citez un autre problème (simple...) soluble avec une méthode ayant la même complexité.

1. Pas d'intercalaire. Les réponses trop longues sont notées 0. Répondez dans l'ordre.

Sac à dos. L'heuristique gloutonne ne donne pas toujours la solution optimale pour le problème du sac à dos. Elle considère les éléments par rendement décroissant, et, pour i de 1 à n, si le i ème élément entre dans le sac, il est pris. Le rendement du i ème élément, d'utilité u_i et de poids p_i est le rapport (pas forcément entier) $r_i = u_i/p_i$.
A. Dans l'exemple ci-dessous, il y a $n = 2$ éléments, et le poids du sac ne doit pas dépasser $W = 2$. Dans quel intervalle doit se trouver x, l'utilité de l'élément numéro 2, pour que les éléments soient bien classés, et que le glouton ne donne pas le sac optimal ? (1 ligne)

i	1	2
utilité u_i	10	x
poids p_i	1	2
rendement $r_i = \frac{u_i}{p_i}$	10	$x/2$

B. Dans l'exemple ci-dessous, il y a $n = 3$ éléments, et le poids du sac ne doit pas dépasser $W = 4$. x, y sont les utilités du 2 ième et 3 ième éléments. Dessinez dans le plan x, y le polygone dont les points strictement intérieurs sont tels que les rendements sont strictement décroissants, le résultat de l'algorithme glouton est le sac avec les éléments 1 et 2, et le sac optimal contient les éléments 2 et 3. Pas de texte.

i	1	2	3
utilité u_i	10	x	y
poids p_i	1	2	2
rendement u_i/p_i	10	$x/2$	$y/2$

C. Citez un problème vu en cours où l'algorithme glouton donne le résultat exact.

Complexité. Pour n données, un algorithme nécessite $T(n)$ opérations. T est tel que $T(1) = 1$ et $T(n) = 5T(n/2) + n^2$.
1. Que valent $T(1), T(2), T(4), T(8)$? (1 ligne)
2. Quelle est la matrice M constante telle que $(T(n), n^2, n)^T = M(T(n/2), (n/2)^2, n/2)^T$. Répondre en 3 lignes.
3. Pour $n = 2^k$, exprimez $(T(n), n^2, n)^T$ en fonction de M et de $(T(1), 1, 1)^T$. Répondre en 1 ligne.
4. Quelles sont les valeurs propres λ, λ' et λ'' de M ($|\lambda| \geq |\lambda'| \geq |\lambda''|$) ? Répondre en une ligne.
5. La complexité de l'algorithme est $n^X = \lambda^k$ avec $2^k = n$. Que vaut X ? Répondre en une ligne.
6. Il existe trois constantes a, b et c telles que, pour $n = 2^k$, $T(n) = a\lambda^k + b\lambda'^k + c\lambda''^k$. En 3 lignes, posez le système linéaire le plus simple définissant a, b, c. En 1 ligne, donnez les valeurs de a, b, c.

Fonction alpha. Que vaut $\alpha(n)$? Dans quel problème intervient-elle ? (3 lignes au plus)